المادة : رياضيات

الأستاذة زايدي سهام

المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية + ر + تق ر

المحتوى المعرفي : الأعداد المركبة

الكفاءات المستهدفة: - التعرف على بعض الرموز و الإصطلاحات- التمثيل الهندسي لعدد مركب .

- سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:			

⋆ التهيئة النفسية: التذكير بالمجموعات الجزئية للمجموعة $\mathbb{R}$.

نشاط:

نفرض أن a عدد حقيقي موجب تماما و منه : المعادلة $x^2+a=0$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$

- نعتبر المجموعة $\mathbb{C}$ حيث : $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ و كل خواص العميات المعروفة في $\mathbb{R}$ توظف بنفس الطريقة في $\mathbb{C}$

- لنتخيل عنصرا i من $\mathbb{C}$ يحقق : $i^2=-1$

❶ برر لماذا العنصر i ليس حقيقيا ؟

❷ بين أن : $i\sqrt{a}$ و $-i\sqrt{a}$ ينتميان إلى $\mathbb{C}$ ثم تحقق أنهما حلان للمعادلة $x^2+a=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$

❸ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلتين : $x^2+x-1=0$ و $x^2+x+1=0$

مناقشة النشاط:

❶ إذا افترضنا أن $i\in\mathbb{R}$ فإن : $i^2\in\mathbb{R}_+$ و هذا تناقض .
إذن : الإفتراض خاطيء و بالتالي : i ليس عددا حقيقيا .

❷ لدينا : $a\in\mathbb{R}_+^*$ و عليه : $\sqrt{a}\in\mathbb{R}$ و $-\sqrt{a}\in\mathbb{R}$
و بما أن : $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ فإن : $\sqrt{a}\in\mathbb{C}$ و $-\sqrt{a}\in\mathbb{C}$
و لدينا : i عنصر من $\mathbb{C}$ إذن : $i\sqrt{a}$ و $-i\sqrt{a}$ ينتميان إلى $\mathbb{C}$
لدينا : $(i\sqrt{a})^2+a=i^2a+a=-a+a=0$
و كذلك : $(-i\sqrt{a})^2+a=i^2a+a=-a+a=0$
إذن : $i\sqrt{a}$ و $-i\sqrt{a}$ هما حلان للمعادلة $x^2+a=0$ في $\mathbb{C}$

❸ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلتين : $x^2+x-1=0$ و $x^2+x+1=0$

تعريف: نسمي عددا مركبا كل عدد z يكتب على الشكل $z=x+iy$
حيث: x و y عددان حقيقيان و $i^2=-1$

ملاحظات وترميز:

⋆ نرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بـ : $\mathbb{C}$

⋆ العدد الحقيقي x يسمى الجزء الحقيقي للعدد المركب z و نرمز له بالرمز : $Re(z)$

⋆ العدد الحقيقي y يسمى الجزء التخيلي للعدد المركب z و نرمز له بالرمز : $Im(z)$

⋆ إذا كان $y=0$ نقول إن العدد z حقيقي .

⋆ إذا كان $x=0$ نقول إن العدد z تخيلي صرف (أو تخيلي بحت أو تخيلي محض)

ملاحظات	المدة	السير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المراحل

بناء المفاهيم:

⋆ يكون العدد المركب z معدوما إذا و فقط إذا كان جزؤه الحقيقي معدوما و جزؤه التخيلي معدوما أي : $z = 0$ يعني : $x = 0$ و $y = 0$

⋆ الكتابة $z = x + iy$ تسمى الشكل الجبري للعدد المركب z

⋆ يتساوى عددان مركبان z و z' إذا و فقط إذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي و نفس الجزء التخيلي .

نضع : $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ لدينا $z = z'$ معناه : $x = x'$ و $y = y'$

تمرين تطبيقي «①» : عين $Re(z)$ و $Im(z)$ في كل حالة :

❶ $z = 3 + 2i$ ❷ $z = i - 2\sqrt{3}$ ❸ $z = \sqrt{3}$ ❹ $z = 2i$

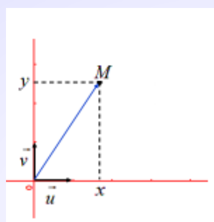
تمرين تطبيقي «②» : z عدد مركب حيث : $z = (x^2 + x) + i(x^2 + y - 1)$

ـ عين العددين الحقيقيين x و y حتى يكون العدد المركب z معدوما .

التمثيل الهندسي لعدد مركب :

تعريف:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ لكل نقطة $M(x; y)$ من المستوي نرفق العدد المركب $z = x + iy$



⋆ نقول إن النقطة M هي صورة العدد المركب z ، و الشعاع $\overrightarrow{OM}$ يسمى كذلك صورة العدد المركب z

⋆ كل نقطة M هي صورة عدد مركب وحيد $z = x + iy$ و نقول إن z لاحقة النقطة M و الشعاع $\overrightarrow{OM}$

⋆ محور الفواصل يسمى المحور الحقيقي و محور التراتيب يسمى المحور التخيلي

⋆ المستوي يسمى المستوي المركب

مثال:

ـ لاحقة النقطة $A(1; -3)$ هي : $z_A = 1 - 3i$

ـ إحداثيا النقطة B ذات اللاحقة $z_B = 2 + \sqrt{3}i$ هي : $B(2; \sqrt{3})$

تمرين تطبيقي: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، x و y عددان حقيقيان .

لتكن (S) مجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوي حيث : $z = x^2 + y(1 + i) - i$

ـ عين المجموعة (S) بحيث يكون z حقيقيا .

تقويم:

حل التمرين 02 و 04 صفحة 144

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المادة : رياضيات

المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية + ر + تق ر

الأستاذة زايدي سهام

المحتوى المعرفي : الأعداد المركبة

الكفاءات المستهدفة: – العمليات الحسابية على الأعداد المركبة .

– سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات

الإنطلاق:

⋆ التهيئة النفسية: التذكير بالمجموعات الجزئية للمجموعة $\mathbb{R}$.

العمليات في مجموعة الأعداد المركبة :

مجموع وجداء عددين مركبين :

تعريف: z عدد مركب حيث : $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$) و z' عدد مركب حيث : $z' = x' + iy'$ ($x' \in \mathbb{R}$ و $y' \in \mathbb{R}$)

⋆ مجموع العددين z و z' هو العدد المركب :

$$z + z' = x + x' + i(y + y')$$

⋆ جداء العددين z و z' هو العدد المركب :

$$z.z' = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$$

ملاحظة:

⋆ قواعد الحساب المعروفة في $\mathbb{R}$ تبقى صحيحة في $\mathbb{C}$

أمثلة:

- $(1 - i) + (3 + 2i) = 1 + 3 + i(-1 + 2) = 4 + i$
- $(1 + 3i)(2 + i) = 2 + i + 6i + 3i^2 = -1 + 7i$

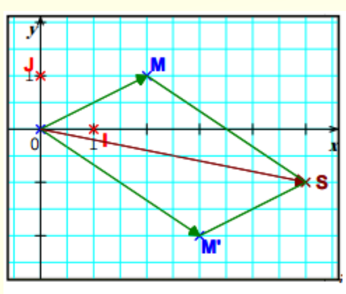
التفسير الهندسي لمجموع عددين مركبين :

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

z لاحقة النقطة M و z' لاحقة النقطة M'

⋆ المجموع $z + z'$ هو لاحقة النقطة S حيث : $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$

أي : $\overrightarrow{OS}$ هو محصلة الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'}$



المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات

ملاحظات:

⋆ إذا كان z لاحقة الشعاع $\overrightarrow{u}$ و كان z' لاحقة الشعاع $\overrightarrow{v}$ فإن : $z+z'$ هو لاحقة $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$

⋆ إذا كان z لاحقة الشعاع $\overrightarrow{u}$ و كان k عددا حقيقيا فإن : kz هو لاحقة $k\overrightarrow{u}$

⋆ شعاعان متساويان لهما نفس اللاحقة .

لاحقة شعاع ـ لاحقة مرجح :

بناء المفاهيم:

> **خاصية:** المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$
> A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب .
>
> • $z_B - z_A$ هي لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$
>
> • α و β عددان حقيقيان حيث : $\alpha+\beta \neq 0$ ، G مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$
>
> لاحقة النقطة G هي : $\dfrac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha+\beta}$

تمرين تطبيقي «①» :

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $z_A = 1-3i$ ، $z_B = 3+i$ و $z_C = 2+2i$

ـ عين لواحق الأشعة : $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

تمرين تطبيقي «②» :

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب :

$z_A = 3i$ ، $z_B = -3i$ و $z_C = 2-3i$

① عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,2);(C,-2)\}$

② عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$AM^2 + 2BM^2 - 2CM^2 = 25$$

تقويم

حل التمرين 20 و 26 صفحة 145

حل التمرين 88 و 89 صفحة 150

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المادة : رياضيات

الأستاذة زايدي سهام

المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية + ر + تق ر

المحتوى المعرفي : الأعداد المركبة

الكفاءات المستهدفة: − استعمال خواص مرافق عدد مركب .

− سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية: التذكير بالشكل الجبري لعدد مركب . نشاط: المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ $M(x;y)$ نقطة من المستوي لاحقتها z M' نظيرة M بالنسبة إلى محور الفواصل ، نرمز للاحقتها بـ $\overline{z}$ ❶ اكتب z و $\overline{z}$ على الشكل الجبري ثم احسب $z+\overline{z}$ ، $z-\overline{z}$ و $z\overline{z}$ ❷ اجعل مقام العدد المركب $\dfrac{1+i}{2+3i}$ عددا حقيقيا ثم اكتبه على الشكل الجبري . مناقشة النشاط: ❶ لدينا $M(x;y)$ ومنه : $M'(x;-y)$ و بالتالي : $z=x+iy$ و $\overline{z}=x-iy$ $z+\overline{z}=2x$ $\quad z-\overline{z}=2iy$ $\quad z\overline{z}=x^2+y^2$ ❷ لدينا : $\dfrac{1+i}{2+3i}=\dfrac{(1+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\dfrac{5}{13}-\dfrac{1}{13}i$ مرافق عدد مركب : تعريف: z عدد مركب حيث : $z=x+iy$ ($x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$) العدد المركب : $x-iy$ و الذي نرمز له : $\overline{z}$ يسمى مرافق العدد المركب z ملاحظة: ⋆ للحصول على مرافق عدد مركب z نغير إشارة الجزء التخيلي . أمثلة: $\overline{2+3i}=2-3i$ $\quad \overline{1-5i}=1+5i$ $\quad \overline{2i}=-2i$ $\quad \overline{-3}=-3$ تمرين تطبيقي : اكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة التالية : ❶ $z_1=\dfrac{4-6i}{3+2i}$ ❷ $z_2=\dfrac{5+15i}{1+2i}$ ❸ $z_3=\dfrac{3+2i}{(1+i)(-6-5i)}$ مقلوب عدد مركب : مبرهنة: كل عدد مركب غير معدوم z له مقلوب في $\mathbb{C}$ يرمز له : $\dfrac{1}{z}$		

المراحل	السير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات

خواص مرافق عدد مركب :

خواص:

❖ $\overline{\overline{z}} = z$ ❖ $z + \overline{z} = 2Re(z)$

❖ $z - \overline{z} = 2iIm(z)$ ❖ $z\overline{z} = (Re(z))^2 + (Im(z))^2$

المرافق والعمليات :

بناء المفاهيم:

z عددا مركبا و مرافقه $\overline{z}$ ، z' عددا مركبا و مرافقه $\overline{z'}$

❖ $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ ❖ $\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$ ❖ $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ مع: $n \in \mathbb{N}^*$

❖ $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ مع: $z \neq 0$ ❖ $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ مع: $z' \neq 0$

البرهان:

تمرين تطبيقي «①» : نضع : $z_1 = \dfrac{3-i}{2+5i}$ و $z_2 = \dfrac{3+i}{2-5i}$

❶ بدون إجراء الحساب برر أن $z_1 + z_2$ هو عدد حقيقي و $z_1 - z_2$ هو عدد تخيلي صرف .

❷ احسب $z_1 + z_2$ و $z_1 - z_2$ ثم استنتج الشكل الجبري للعدد المركب z_1

حل التمرين التطبيقي «①» :

❶ لدينا : $z_2 = \overline{z_1}$ و منه : $z_1 + z_2 = z_1 + \overline{z_1} = 2Re(z_1)$

و $z_1 - z_2 = z_1 - \overline{z_1} = 2iIm(z_1)$

❷ $z_1 + z_2 = \frac{(3-i)(2-5i)+(3+i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{2}{29}$

$z_1 - z_2 = \frac{(3-i)(2-5i)-(3+i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{-34i}{29}$

إذن : $z_1 = \frac{1}{29} - \frac{17}{29}i$

تمرين تطبيقي «②» : ليكن كثير الحدود P للمتغير المركب z المعرف بـ :

$$P(z) = z^3 + z^2 - 2$$

❶ أثبت أنه من أجل كل عدد مركب z : $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$

❷ احسب $P(1)$ و $P(-1-i)$

❸ عين جذور $P(z)$

حل التمرين التطبيقي «②» :

تقويم

❶ لدينا : $\overline{P(z)} = \overline{z^3 + z^2 - 2} = \overline{z^3} + \overline{z^2} - \overline{2} = (\overline{z})^3 + (\overline{z})^2 - 2 = p(\overline{z})$

❷ $P(1) = 0$ و $p(-1-i) = 2i(-1-i) + 2i - 2 = 0$

❸ لدينا : $p(-1-i) = 0$ و منه : $\overline{p(-1-i)} = 0$ و بالتالي : $p(\overline{-1-i}) = 0$

أي : $p(-1+i) = 0$.

حل التمرين 16و17صفحة 145

حل التمرين 102و106صفحة 152

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المادة : رياضيات

المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية + ر + تق

المحتوى المعرفي : الأعداد المركبة

الأستاذة زايدي سهام

الكفاءات المستهدفة: – حساب طويلة و عمدة عدد مركب غير معدوم .

– سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية: طويلة عدد مركب : **تعريف:** z عدد مركب حيث : $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$) نسمي طويلة العدد المركب z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له : $\|z\|$ حيث : $\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ **أمثلة:** • $\|2 + 3i\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ • $\|-3 + 4i\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ التفسير الهندسي لطويلة عدد مركب : المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ z عدد مركب حيث : $z = x + iy$ صورته M إذن : $OM = \|z\|$ **ملاحظات:** ⋆ $z.\overline{z} = x^2 + y^2 = \|z\|^2$ ⋆ A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب : $AB = \|z_B - z_A\|$ **خواص:** من أجل كل عددين مركبين z و z' ❖ $\|\overline{z}\| = \|z\|$ ❖ $\|-z\| = \|z\|$ ❖ $\|z.z'\| = \|z\|.\|z'\|$ ❖ $\|\frac{z}{z'}\| = \frac{\|z\|}{\|z'\|}$ مع : $z' \neq 0$ ❖ $\|z^n\| = \|z\|^n$ ❖ $\|z + z'\| \leq \|z\| + \|z'\|$ **أمثلة:** ❖ $\| (1+i)(2+3i) \| = \| 1+i \| \| 2+3i \| = \sqrt{2}\sqrt{13} = \sqrt{26}$ ❖ $\|\frac{3-4i}{\sqrt{3}-i}\| = \frac{\| 3-4i \|}{\| \sqrt{3}-i \|} = \frac{5}{2}$ ❖ $\| (-1+2i)^4 \| = \| -1+2i \|^4 = (\sqrt{5})^4 = 25$		

المراحل	التسيير(الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات

توظيف طويلة عدد مركب لتعيين مجموعة نقط :

تمرين تطبيقي : عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة العدد المركب z :

❶ $|z+1+2i| = |z-4|$ ❷ $|z-3i| = 2$ ❸ $|2z-i| = 2$

عمدة عدد مركب غير معدوم :

نشاط:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

z عدد مركب حيث : $z=\sqrt{3}+i$ و M صورته .

❶ احسب $|z|$ ثم استنتج $\cos(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$ و $\sin(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$

❷ استنتج قيسا بالراديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$

بناء المفاهيم:

تعريف:

z عدد مركب غير معدوم حيث : $z=x+iy$ ($x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$)

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$

لتكن M صورة z .

نسمي عمدة العدد المركب z كل قيس بالراديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$

و نرمز لها : $arg(z)$

ملاحظات:

❖ كل عدد مركب غير معدوم له عدد غير منته من العمد

أي : إذا كانت θ عمدة لـ z فإن $\theta+2k\pi$ عمدة له .

❖ العدد 0 ليس له عمدة لأن صورته هي مبدء المعلم و الزاوية $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OO})$ غير معروفة .

❖ A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب .

$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}) - (\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA})$ أي : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = arg(z_B) - arg(z_A)$

❖ $arg(z_B - z_A) = (\overrightarrow{OI};\overrightarrow{AB})$

تمرين تطبيقي : عين عمدة للأعداد المركبة التالية :

① $z_A = 1+\sqrt{3}i$ ② $z_B = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

③ $z_C = -3i$ ④ $z_D = 6$

ـ استنتج قيسا بالراديان لكل من الزاويتين الموجهتين $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ و $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{AB})$

تقويم

طريقة: إذا كانت θ عمدة للعدد المركب z مع: $z=x+iy$ و $z\neq 0$

فإن : $\begin{cases}\cos\theta = \frac{x}{r}\\ \sin\theta = \frac{y}{r}\end{cases}$ حيث : $|z| = r$

حل التمرين 30 صفحة 146

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المادة : رياضيات

المستوى و الشعبة: الثالثة علوم تجريبية

المحتوى المعرفي : الأعداد المركبة

الأستاذة زايدي سهام

الكفاءات المستهدفة: – الإنتقال من الشكل الجبري إلى المثلثي و العكس .

– سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:			

⋆ التهيئة النفسية: التذكير بطويلة و عمدة عدد مركب غير معدوم .

الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم :

تمهيد:

في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ تعلم نقطة M بإحداثياتها الديكارتية $M(x;y)$ أو بإحداثياتها القطبية $M(r;\theta)$

حيث : $OM = r$ و $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}) = \theta$

نضع : $z = x + iy$ و لدينا $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ و $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ إذن : $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$

و بالتالي : $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$ أي: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

تعريف: z عدد مركب غير معدوم .

تسمى الكتابة : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ بالشكل المثلثي للعدد المركب z

حيث : $r = |z|$ و $\theta = arg(z)$

ملاحظات:

⋆ يكون عددان مركبان مكتوبان على الشكل المثلثي متساويين إذا و فقط إذا كانت لهما نفس الطويلة و عمدتان متوافقتان بترديد 2π

⋆ إذا كان $r < 0$ فإن الكتابة $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ لا تمثل الشكل المثلثي .

تمرين تطبيقي «①» : اكتب الشكل المثلثي للأعداد المركبة :

① $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ ② $z_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

③ $z_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $z_4 = -\sqrt{6} + i\sqrt{2}$

تمرين تطبيقي «②» : اكتب الشكل المثلثي للعدد المركب z في كل حالة :

① $z = 4(\cos(\dfrac{\pi}{4}) - i\sin(\dfrac{\pi}{4}))$ ② $z = -3(\cos(\dfrac{\pi}{3}) + i\sin(\dfrac{\pi}{3}))$

③ $z = \sqrt{5}(\sin(\dfrac{\pi}{6}) + i\cos(\dfrac{\pi}{6}))$ ④ $z = -\sin(\dfrac{\pi}{6}) + i\cos(\dfrac{\pi}{6})$

طريقة: نستعمل الدائرة المثلثية لاستخراج بعض العلاقات المثلثية .

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
بناء المفاهيم:	حل التمرين التطبيقي «②» : ① $z = 4(\cos(\frac{\pi}{4}) - i\sin(\frac{\pi}{4})) = 4(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$ ② $z = -3(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})) = 3(-\cos(\frac{\pi}{3}) - i\sin(\frac{\pi}{3}))$ نعلم أن : $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ و $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ إذن : $z = 3(\cos(\pi + \frac{\pi}{3}) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{3})) = 3(\cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3}))$ ③ $z = \sqrt{5}(\sin(\frac{\pi}{6}) + i\cos(\frac{\pi}{6}))$ نعلم أن : $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$ و $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$ إذن : $z = \sqrt{5}(\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})) = \sqrt{5}(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))$ ④ $z = -\sin(\frac{\pi}{6}) + i\cos(\frac{\pi}{6})$ نعلم أن : $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$ و $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$ إذن : $z = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})$ تمرين تطبيقي «③» : اكتب على الشكل الجبري للعدد المركب z : $z = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos(\frac{5\pi}{4}) + i\sin(\frac{5\pi}{4})\right)$ حل التمرين التطبيقي «③» : $z = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos(\frac{5\pi}{4}) + i\sin(\frac{5\pi}{4})\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos(\pi + \frac{\pi}{4}) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{4})\right)$ و منه $z = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$		
تقويم	حل التمرين 45 صفحة 147		

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المادة : رياضيات

المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية + ر + تق ر

الأستاذة زايدي سهام

المحتوى المعرفي : الأعداد المركبة

الكفاءات المستهدفة: - توظيف خواص العمدة لحل مسائل .

- سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية: التذكير بالشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم . خواص عمدة عدد مركب غير معدوم : **خواص:** z و z' عددان مركبان غير معدومين . ❖ $arg(z.z') = arg(z) + arg(z')$ ❖ $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')$ ❖ $arg(z^n) = narg(z)$ مع: $n \in \mathbb{N}^*$ ❖ $arg(\overline{z}) = -arg(z)$ مع : $\overline{z}$ هو مرافق العدد المركب z البرهان : **نتيجة:** المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ A ، B و C ثلاث نقط لواحقها z_A ، z_B و z_C على الترتيب . $$arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})$$ **تمرين تطبيقي «①» :** z_1 و z_2 عددين مركبين حيث : $z_1 = 1 + i$ و $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ ① اكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي . ② اكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل المثلثي . ③ استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ **تمرين تطبيقي «②» :** z عدد مركب حيث : $z = 1 - i$ ① عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها z^n عددا حقيقيا . ② عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها z^n عددا تخيليا صرفا . **طريقة:** z عدد مركب غير معدوم و n عدد طبيعي . ✍ z^n حقيقي معناه : $arg(z^n) = k\pi$ مع: $k \in \mathbb{Z}$ ✍ z^n تخيلي صرف معناه : $arg(z^n) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ مع: $k \in \mathbb{Z}$		

المراحل	السير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
بناء المفاهيم	**توظيف خواص العمدة لتعيين مجموعة نقط :** **تمرين تطبيقي :** عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة العدد المركب z : ① $arg(z-2i)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$ ② $arg(z-1-i)=\frac{\pi}{4}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$ ③ $arg\left(\frac{z-i}{z+1-i}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$ ④ $arg(z)=arg(\overline{z})$ **حل التمرين التطبيقي :** ① $arg(z-2i)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$ لتكن A نقطة من المستوي لاحقتها $z_A=2i$ ومنه : مجموعة النقط M هي نصف مستقيم $[AM)$ ما عدا النقطة A حيث : $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ **حالات خاصة :** $\star$ $arg(z)=2k\pi$: M هي نصف مستقيم $[Ox)$ ما عدا النقطة O $\star$ $arg(z)=\pi+2k\pi$: M هي نصف مستقيم $[Ox')$ ما عدا النقطة O $\star$ $arg(z)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$: M هي نصف مستقيم $[Oy)$ ما عدا النقطة O $\star$ $arg(z)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$: M هي نصف مستقيم $[Oy')$ ما عدا النقطة O ② $arg(z-1-i)=\frac{\pi}{4}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$ لتكن B نقطة من المستوي لاحقتها $z_B=1+i$ ومنه : مجموعة النقط M هي مستقيم (BM) ما عدا النقطة B حيث : $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{BM})=\frac{\pi}{4}$ **حالة خاصة :** $\star$ $arg(z)=\frac{\pi}{4}+k\pi$: M هي المنصف الأول باستثناء النقطة O . ③ $arg\left(\frac{z-i}{z+1-i}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$ لتكن A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما $z_A=i$ و $z_B=1+i$ ومنه : مجموعة النقط M هي دائرة قطرها $[AB]$ ما عدا النقطتين A و B . **حالة خاصة :** $\star$ $arg\left(\frac{z-i}{z+1-i}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$: M هي نصف دائرة قطرها $[AB]$ ما عدا النقطتين A و B . ④ $arg(z)=arg(\overline{z})$ أي : $arg(z)=-arg(z)$ ومنه: $2arg(z)=0+2k\pi$ ومنه : $arg(z)=k\pi$ أي : $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM})=k\pi$ ومنه : مجموعة النقط M هي حامل محور الفواصل (xx') ما عدا المبدأ O .		
تقويم	حل التمرين 46 صفحة 147 حل التمرين 121و123صفحة 154		

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المادة : رياضيات

الأستاذة زايدي سهام

المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية+ ر + تق ر

المحتوى المعرفي : الأعداد المركبة

الكفاءات المستهدفة: - الإنتقال من الشكل الجبري إلى الأسي و العكس .

- سير الحصة

المراحل	التسيير(الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية: التذكير بالشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم . **نشاط:** المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ z_0 عدد مركب طويلته 1 و لتكن θ عمدة له إذن : $z_0=\cos\theta+i\sin\theta$ لتكن f الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي θ العدد المركب z_0 أي: $f(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$ ① احسب $f(\theta+\theta')$ و $f(\theta).f(\theta')$ حيث : θ و θ' عددان حقيقيان . **إرشاد** : استخدم دستوري الجمع $\cos(\theta+\theta')=\cos\theta.\cos\theta'-\sin\theta.\sin\theta'$ و $\sin(\theta+\theta')=\sin\theta.\cos\theta'+\sin\theta'.\cos\theta$ ② ماذا تستنتج ؟ **تعريف: (ترميز أولر)** نضع : $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ هذا الترميز يسمى ترميز أولر . حيث : $e^{i\theta}$ عدد مركب طويلته 1 و θ عمدة له . **الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم :** **تعريف:** العدد المركب z غير المعدوم الذي طويلته r و θ عمدة له . يكتب : $\boxed{z=re^{i\theta}}$ هذه الكتابة تسمى الشكل الأسي للعدد المركب z . **مثال:** $z=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ **تمرين تطبيقي «①» :** عين الشكل الأسي للأعداد المركبة : ① $z_1=-3-3i$ ② $z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ③ $z_3=2i$ ④ $z_4=-3$ **تمرين تطبيقي «②» :** اكتب الشكل الجبري العدد المركب z في كل حالة : ① $z=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ② $z=6e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ③ $z=3e^{-i\frac{\pi}{2}}$		

المراحل	السير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
بناء المفاهيم	**خواص:** θ و θ' عددان حقيقيان . ❖ $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}.e^{i\theta'}$ ❖ $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$ ❖ $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ **مثال :** z_1 و z_2 عددين مركبين حيث : $z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$. لدينا : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = 2e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ **دستور موافر :** z عدد مركب طويلته 1 و θ عمدة له . من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ أي : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ **تمرين تطبيقي :** باستعمال دستور موافر اكتب على الشكل الأسي العدد المركب z حيث : $z = (1-i)^8$ **توظيف الشكل الأسي لتعيين مجموعة نقط :** المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي . M_0 نقطة لاحقتها العدد المركب z_0 . ◗ مجموعة النقط M ذات اللاحقة العدد المركب z حيث : $z = z_0 + re^{i\theta}$ هي : ① دائرة مركزها M_0 و نصف قطرها r من أجل : r ثابت و θ متغير . ② نصف مستقيم $[M_0M)$ ما عدا النقطة M_0 حيث $(\vec{u};\overrightarrow{M_0M}) = \theta$ من أجل : r متغير و θ ثابت.		
تقويم	**تمرين تطبيقي :** عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة العدد المركب z : ① $z = 1+i+2e^{i\theta}$; $\theta \in \mathbb{R}$ ② $z = 1+i+2e^{i\theta}$; $\theta \in]0;\pi]$ ③ $z = 2-2i+re^{i\frac{\pi}{3}}$; $r \in \mathbb{R}_+^*$ **حل التمرين التطبيقي:** ① دائرة مركزها C ذات اللاحقة $z_C = 1+i$ و نصف قطرها 2 . ② M تمسح نصف الدائرة التي قطرها $[AB]$ حيث : A و B نقطتان من المستوي لاحقتيهما $z_C - r$ و $z_C + r$. ③ نصف المستقيم $[DM)$ حيث : $(\vec{u};\overrightarrow{DM}) = \frac{\pi}{3}$ مع : D نقطة لاحقتها $z_D = 2-2i$. حل التمرين 54و 55 صفحة 147 حل التمرين 131و132صفحة 155		

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المادة : رياضيات

المستوى والشعبة : الثالثة علوم تجريبية + ر + تق ر

الأستاذة زايدي سهام

المحتوى المعرفي : الأعداد المركبة

الكفاءات المستهدفة: – توظيف خواص الطويلة و العمدة لحل مسائل في الهندسة .

– سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	(see below)		

⋆ التهيئة النفسية: التذكير بمكتسبات السنة الماضية .

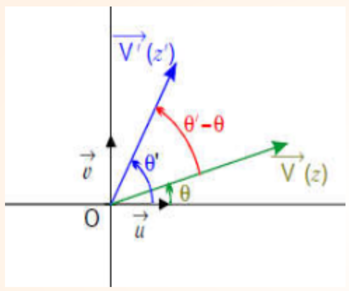
توظيف خواص الطويلة والعمدة لحل مسائل في الهندسة:

خاصية «①»:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{u},\vec{v})$ الشعاعان $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'}$ لاحقتاهما z و z' على الترتيب .

حيث : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

و $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$



⋆ $(\vec{u};\overrightarrow{OM}) = arg(z) = \theta$ و $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = arg(z') = \theta'$

⋆ $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{OM};\vec{u}) + (\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = (\vec{u};\overrightarrow{OM'}) - (\vec{u};\overrightarrow{OM})$

إذن : $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}) = arg(z') - arg(z) = \theta' - \theta$

خاصية «②»:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

النقط A ، B ، C و D لواحقها z_A ، z_B ، z_C و z_D على الترتيب .

• $\left|\dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right| = \dfrac{|z_B - z_A|}{|z_D - z_C|} = \dfrac{AB}{CD}$

• $arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = (\overrightarrow{OI};\overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{OI};\overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{OI};\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{CD};\overrightarrow{OI})$

إذن : $arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = (\overrightarrow{CD};\overrightarrow{AB})$

نتائج:

⋆ تكون النقط A ، B و C في استقامية إذا كان العدد المركب $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ حقيقيا .

⋆ يكون المستقيمان (AB) و (AC) متعامدين إذا كان العدد المركب $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ تخيليا صرفا .

<table>
<tr><th>ملاحظات</th><th>المدة</th><th>التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)</th><th>المراحل</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>

تمرين تطبيقي:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

النقط A ، B ، C و D لواحقها $z_A=-i\sqrt{3}$ ، $z_B=3+2i\sqrt{3}$ ، $z_C=-3+2i\sqrt{3}$ و $z_D=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ على الترتيب .

❶ أعط تفسيرا هندسيا لطويلة و عمدة العدد المركب : $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$

❷ ما هي طبيعة المثلث ABC

❸ بين أن النقط A ، B و D على استقامة واحدة .

حل التمرين التطبيقي:

❶ لدينا : $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

- $\left\lvert\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right\rvert=\frac{\lvert z_B-z_A\rvert}{\lvert z_C-z_A\rvert}=\frac{AB}{AC}$
- $arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{AB})-(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$

❷ طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $\frac{AB}{AC}=1$ أي : $AB=AC$ و $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})=-\frac{\pi}{3}$

إذن : المثلث ABC متقايس الأضلاع .

❸ تبيان أن النقط A ، B و D على استقامة واحدة :

$\frac{z_B-z_A}{z_D-z_A}=2$ أي : $z_B-z_A=2(z_D-z_A)$ أي : $z_{\overrightarrow{AB}}=2z_{\overrightarrow{AD}}$

إذن : النقط A ، B و D على استقامة واحدة .

</td><td>بناء المفاهيم:</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>حل التمرين 116 صفحة 153 .</td><td>تقويم</td></tr>
</table>

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المادة : رياضيات

الأستاذة زايدي سهام

المستوى والشعبة : الثالثة علوم تجريبية + ر + تق ر

المحتوى المعرفي : الأعداد المركبة

الكفاءات المستهدفة: - حل معادلات من الدرجة الثانية - حل معادلات يأول حلها إلى حل معادلة من الدرجة الثانية

- سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية: التذكير بمكتسبات السنة الماضية . **الجذران التربيعيان لعدد مركب :** **تعريف:** z عدد مركب غير معدوم . الجذر التربيعي للعدد المركب z هو العدد المركب w حيث : $z = w^2$ **مثال:** ◆ $(3i)^2 = -9$ و $(-3i)^2 = -9$ أي : الجذران التربيعيان للعدد -9 هما : $3i$ و $-3i$ ◆ $(i\sqrt{5})^2 = -5$ و $(-i\sqrt{5})^2 = -5$ أي : الجذران التربيعيان للعدد -5 هما : $i\sqrt{5}$ و $-i\sqrt{5}$ ◆ الجذران التربيعيان للعدد $3-4i$ هما : $2-i$ و $-2+i$ **ملاحظة:** كل عدد مركب غير معدوم يقبل جذرين تربيعيين متناظرين . **البحث عن الجذرين التربيعيين لعدد مركب :** $z = a + ib$ عدد مركب و $w = x + iy$ جذر تربيعي له أي : $w^2 = z$ $w^2 = z$ معناه : $\begin{cases} \lvert w^2 \rvert = \lvert z \rvert \\ Re(w^2) = Re(z) \\ Im(w^2) = Im(z) \end{cases}$ معناه : $\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$ **تمرين تطبيقي :** جد الجذور التربيعية للأعداد المركبة التالية : $4 \; ; \; 2i \; ; \; -8+6i$ **تمرين تطبيقي :** ◆ الجذور التربيعية للعدد $-8+6i$ يعني حل المعادلة $w^2 = -8+6i$ مع: $w = x + iy$ **ملاحظة:** ◆ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 = z_0$ يعني : تعيين الجذرين التربيعيين للعدد z_0		

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات

بناء المفاهيم:

المعادلات من الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية :

مبرهنة: لتكن المعادلة ذات المجهول المركب z : $az^2 + bz + c = 0$
حيث a ، b و c أعداد حقيقية و $a \neq 0$.
لدينا $\Delta = b^2 - 4ac$ مميز هذه المعادلة .

- إذا كان $\Delta = 0$: المعادلة تقبل حلا مضاعفا $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$
- إذا كان $\Delta > 0$: المعادلة تقبل حلين حقيقيين مختلفين هما :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- إذا كان $\Delta < 0$: المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين هما :

$$z_1 = \frac{-b - w}{2a} \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{-b + w}{2a}$$

حيث : w جذر تربيعي لـ Δ

تمرين تطبيقي : حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :

① $z^2 - z + 1 = 0$ ② $z^2 - 2z + 3 = 0$

معادلات يؤول حلها إلى حل معادلة من الدرجة الثانية :

تمرين تطبيقي : نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) التالية :

$$z^3 - 3z^2 + 5z - 3 = 0$$

① تحقق أن العدد 1 هو حل للمعادلة (E)

② عين العددين الحقيقيين a و b حتى يكون من أجل كل عدد مركب z :

$$z^3 - 3z^2 + 5z - 3 = (z-1)(z^2 + az + b)$$

③ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

تقويم

حل التمرين 56و 60و 61 صفحة 148
حل التمرين 146و 151صفحة 157

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المادة : رياضيات

الأستاذة زايدي سهام

المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية + ر + تق ر

المحتوى المعرفي : الأعداد المركبة

الكفاءات المستهدفة: - التعرف على الانسحاب و عناصره المميزة .

- سير الحصة

<table>
<tr><th>المراحل</th><th>التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)</th><th>المدة</th><th>ملاحظات</th></tr>
<tr><td>الإنطلاق:

بناء المفاهيم:

تقويم</td><td>

⋆ التهيئة النفسية: التذكير بمكتسبات السنة الماضية .

الانسحاب:

تعريف:
الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{u}$ هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$

خواص:

- صورة ثنائية $(A;B)$ بالانسحاب هي ثنائية $(A';B')$ تحقق : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$
- الانسحاب تقايس .

الأعداد المركبة والانسحاب:
في كل ما يلي المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$

نشاط:
نعتبر الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{u}$ ذو اللاحقة العدد المركب b
لتكن M نقطة لاحقتها z و M' ذات اللاحقة z' هي صورة M بالانسحاب .

❶ عينلاحقة الشعاع $\overrightarrow{MM'}$
❷ اكتب z' بدلالة z

خاصية:
التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = z + b$ (b عدد مركب)
هو انسحاب شعاعه $\overrightarrow{u}$ صورة b

مثال «①» :
⋆ طبيعة التحويل الذي عبارته المركبة : $z' = z + 1 - i$
هو : انسحاب شعاعه $\overrightarrow{u}(1;-1)$

مثال «②» :
⋆ العبارة المركبة للانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{u}(2;3)$ هي : $z' = z + 2 + 3i$

حل التمرين 70و71صفحة 149

</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">ملاحظات عامة حول الحصة: ....</td></tr>
</table>

المادة : رياضيات

المستوى والشعبة : الثالثة علوم تجريبية + ر + تق ر

المحتوى المعرفي : الأعداد المركبة

الكفاءات المستهدفة: – التعرف على التحاكي و عناصره المميزة .

الأستاذة زايدي سهام

– سير الحصة

المراحل	السير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية: التذكير بمكتسبات السنة الماضية .		

التحاكي:

تعريف: Ω نقطة ثابتة و k عدد حقيقي غير معدوم .
التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث : $\overrightarrow{\Omega M'} = k.\overrightarrow{\Omega M}$
مع: $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

خواص:
- صورة ثنائية $(A;B)$ بالتحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k هي ثنائية $(A';B')$ تحقق : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$
- إذا كانت M' صورة M بالتحاكي الذي مركزه O و نسبته k فإن النقط M ، M' و O في استقامية .
- نلاحظ أنه إذا كان $|k| \neq 1$ فإن: $A'B' \neq AB$ إذن : التحاكي ليس تقايسا .
- صورة شكل هندسي مساحته S بتحاك نسبته k هو شكل هندسي مساحته S' حيث : $S' = k^2.S$

الأعداد المركبة والتحاكي:

في كل ما يلي المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$

نشاط:

نعتبر التحاكي h الذي مركزه Ω ذات اللاحقة z_Ω و نسبته k مع: $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$
لتكن M نقطة لاحقتها z و M' ذات اللاحقة z' هي صورة M بالتحاكي h .

❶ عين لاحقة الشعاع $\overrightarrow{\Omega M'}$ و لاحقة $\overrightarrow{\Omega M}$

❷ اكتب z' بدلالة z

خاصية «①»:
التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = az + b$ مع : a عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن 1 و b عدد مركب
هو التحاكي الذي مركزه Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a}$ و نسبته a

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
بناء المفاهيم:	**خاصية «②»:** a عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن 1 ، Ω نقطة ثابتة من المستوي لاحقتها z_Ω . M نقطة لاحقتها z و M' لاحقتها z' العبارة المختصرة للتحاكي الذي مركزه Ω و نسبته a و الذي يحول M إلى M' هي : $$z' - z_\Omega = a(z - z_\Omega)$$ **ملاحظة :** $z' - z_\Omega = a(z - z_\Omega)$ معناه : $z' = az + (1-a)z_\Omega$ معناه : $z' = az + b$ **مثال «①» :** ⋆ طبيعة التحويل الذي عبارته المركبة : $z' = -\frac{1}{2}z + 1 - i$ هو : تحاكي نسبته $-\frac{1}{2}$ و مركزه Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = \dfrac{1-i}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} - i\frac{2}{3}$ إذن : $\Omega(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3})$ **مثال «②» :** ⋆ العبارة المركبة للتحاكي الذي مركزه Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = 1 - i$ و نسبته 2 هي : $z' = 2z + b$ و منه : $z' = 2z - 1 + i$ $(\ b = z_\Omega(1-a)\ )$ **مثال «③» :** A و B نقطتان لاحقتاهما $z_A = i$ و $z_B = 2 + i$ على الترتيب . ⋆ لنعين $z_{B'}$ لاحقة النقطة B' صورة B بالتحاكي h الذي مركزه A و نسبته $\sqrt{3}$: لدينا : $h(B) = B'$ معناه : $z_{B'} - z_A = \sqrt{3}(z_B - z_A)$ و منه : $z_{B'} = \sqrt{3}(z_B - z_A) + z_A$ إذن : $z_{B'} = \sqrt{3}(2 + i - i) + i = 2\sqrt{3} + i$		
تقويم	**تمرين تطبيقي :** المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ A ، B و C ثلاث نقط لواحقها $z_A = i$ ، $z_B = 3 - 2i$ و $z_C = -1 + 2i$ على الترتيب . ① أعط العبارة المركبة للتحاكي h الذي مركزه A و يحول B إلى C ② عين z_D لاحقة النقطة D صورة C بالتحاكي h ③ عين (C) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $z = 3 + i + 2\sqrt{2}e^{i\theta}$ مع: $\theta \in \mathbb{R}$ ④ عين صورة (C) بالتحاكي h حل التمرين 79و 82 صفحة 150 حل التمرين 166و 167 صفحة 160		

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المؤسسة:سليماني جلول — المادة : رياضيات

المستوى والشعبة : الثالثة علوم تجريبية + ر + تق ر

المحتوى المعرفي : الأعداد المركبة — الأستاذة زايدي سهام

الكفاءات المستهدفة: – التعرف على الدوران و عناصره المميزة .

– سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية: التذكير بمكتسبات السنة الماضية . **الدوران:** **تعريف:** Ω نقطة ثابتة و θ عدد حقيقي . الدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ هو التحويل النقطي الذي يرفق النقطة Ω بنفسها و يرفق بكل نقطة M من المستوي تختلف عن النقطة Ω النقطة M' من المستوي حيث : $\Omega M = \Omega M'$ و $(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$ **خواص:** • صورة كل ثنائية $(A;B)$ بالدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ هي ثنائية $(A';B')$ تحقق : $A'B' = AB$ و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}) = \theta$ • الدوران تقايس . • الدوران الذي مركزه Ω و زاويته غير معدومة له نقطة صامدة وحيدة هي Ω **الأعداد المركبة والدوران:** في كل ما يلي المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ **نشاط:** نعتبر الدوران R الذي مركزه Ω ذات اللاحقة z_Ω و زاويته θ مع: $\theta \in \mathbb{R}$ لتكن M نقطة لاحقتها z و M' ذات اللاحقة z' هي صورة M بالدوران R . ❶ عين طويلة و عمدة العدد المركب $a = \dfrac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}$ ثم اكتبه على الشكل الأسي . ❷ اكتب z' بدلالة z **خاصية «①»:** التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = az+b$ مع : a عدد مركب غير حقيقي طويلته 1 و b عدد مركب هو الدوران الذي مركزه Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a}$ و زاويته $arg(a)$		

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات

خاصية «②»:

a عدد مركب غير حقيقي طويلته 1 ، Ω نقطة ثابتة من المستوي لاحقتها z_Ω .
M نقطة لاحقتها z و M' لاحقتها z'
العبارة المختصرة للدوران الذي مركزه Ω و زاويته $arg(a)$ و الذي يحول النقطة M إلى M'
هي : $z' - z_\Omega = a(z - z_\Omega)$ حيث : $a = e^{i\theta}$

بناء المفاهيم:

ملاحظة :

$z' - z_\Omega = a(z - z_\Omega)$ معناه : $z' = az + (1-a)z_\Omega$ معناه : $z' = az + b$

مثال «①» :

⋆ طبيعة التحويل الذي عبارته المركبة : $z' = iz + 2 - i$
هو : دوران زاويته $arg(i) = \frac{\pi}{2}$ و مركزه Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = \frac{2-i}{1-i} = \frac{3}{2} + i\frac{1}{2}$

مثال «②» :

⋆ العبارة المركبة للدوران الذي مركزه Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$
هي : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + b$ و منه : $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - i$ ($b = z_w(1-a)$)
(يمكن استعمال العبارة المختصرة للحصول علي المطلوب)

مثال «③» :

A و B نقطتان لاحتقاهما $z_A = 1 - 2i$ و $z_B = 3 + 2i$ على الترتيب .
⋆ لنعين $z_{B'}$ لاحقة النقطة B' صورة B بالدوران R الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$:
لدينا : $R(B) = B'$ معناه : $z_{B'} - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_A)$
و منه : $z_{B'} = i(z_B - z_A) + z_A$
إذن : $z_{B'} = i(3 + 2i - 1 + 2i) + 1 - 2i = -3$

تمرين تطبيقي :

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$
A ، B و C ثلاث نقط لواحقها $z_A = 3 + 3i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -1 + 2i$
على الترتيب .

① أعط العبارة المركبة للدوران R الذي مركزه O و يحول A إلى B
② استنتج طبيعة المثلث ABO
② عين z_D لاحقة النقطة D صورة C بالدوران R
③ عين (C) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث :

$$z = 2 + i + 2e^{i\theta} \qquad \text{مع: } \theta \in \mathbb{R}$$

تقويم

④ عين صورة (C) بالدوران R

حل التمرين 80و 83 صفحة 150
حل التمرين 162و 163 صفحة 159

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المادة : رياضيات

المستوى والشعبة : الثالثة علوم تجريبية + ر + تق ر — الأستاذة زايدي سهام

المحتوى المعرفي : الأعداد المركبة

الكفاءات المستهدفة: - حل مسائل هندسية تتطلب استعمال انسحابات ، تحاكيات أو دورانات بواسطة الأعداد المركبة .

- سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية:		
بناء المفاهيم:	تطبيقـــــات :		
تقويم	حل التمرين الثاني بكالوريا 2010 ع ت الموضوع الثاني		

تمرين تطبيقي :

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(z^2+3)(z^2-6z+21)=0$$

2. علّم النقط A,B,C,D ذات اللواحق على الترتيب :
$z_A=\sqrt{3}i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=3+2\sqrt{3}i$ ، $z_D=\overline{z_C}$.

3. بين أن النقط A,B,C,D تنتمي إلى نفس الدائرة (C) التي مركزها Ω ذات الاحقة $Z_\Omega=3$.

4. لتكن النقطة E نظيرة D بالنسبة إلى O .

a. بين أن $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ثم عين طبيعة المثلث BEC .

b. عين طبيعة التحويل T الذي يحول E إلى C و عناصره المميزة .

5. ليكن h التحاكي الذي مركزه R ذو اللاحقة $z_w=-3$ و نسبته 2 .

a. أعط العبارة المركبة للتحاكي h .

b. احسب مساحة صورة الدائرة (C) بالتحاكي h .

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المادة : رياضيات

الأستاذة سوالمي خديجة

المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية + ر + تق ر

المحتوى المعرفي : الأعداد المركبة

الكفاءات المستهدفة: - التعرف على التشابه المباشر و عناصره المميزة .

- سير الحصة

المراحل	السير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:			

⋆ التهيئة النفسية: التذكير بمكتسبات السنة الماضية .

مناقشة النشاط 01 صفحة 164:

1. تعيين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل (S) :

$M(x;y)$ صورتها $M'(x';y')$ بالتحويل (S) حيث : $\begin{cases} x' = x\sqrt{3} - y \\ y' = x + y\sqrt{3} \end{cases} \ldots (\bigstar)$

M صامدة معناه : $x = x'$ و $y = y'$

بالتعويض في $(\bigstar)$ نجد : $\begin{cases} x = x\sqrt{3} - y \\ y = x + y\sqrt{3} \end{cases}$

إذن: $(x;y) = (0;0)$ و بالتالي : مجموعة النقط الصامدة هي مبدء المعلم O

2. إثبات أن $A'B' = 2AB$:

لدينا : $S(A) = A'$ أي : $\begin{cases} x_{A'} = x_A\sqrt{3} - y_A \\ y_{A'} = x_A + y_A\sqrt{3} \end{cases}$

و لدينا : $S(B) = B'$ أي : $\begin{cases} x_{B'} = x_B\sqrt{3} - y_B \\ y_{B'} = x_B + y_B\sqrt{3} \end{cases}$

بعد التعويض و الحساب نجد: $A'B' = 2AB$

3. إثبات أن $\dfrac{A'B'}{C'D'} = \dfrac{AB}{CD}$:

لدينا : $S(A) = A'$ و $S(B) = B'$ معناه : $A'B' = 2AB$

و لدينا : $S(C) = C'$ و $S(D) = D'$ معناه : $C'D' = 2CD$

إذن : $\dfrac{A'B'}{C'D'} = \dfrac{AB}{CD}$

4. كتابة z' بدلالة z :

نضع : $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$

و منه : $x' + iy' = (x\sqrt{3} - y) + i(x + y\sqrt{3}) = x(\sqrt{3} + i) - y(1 - i\sqrt{3})$
$= x(\sqrt{3} + i) + iy(\sqrt{3} + i) = (x + iy)(\sqrt{3} + i)$

إذن : $z' = (\sqrt{3} + i)z$

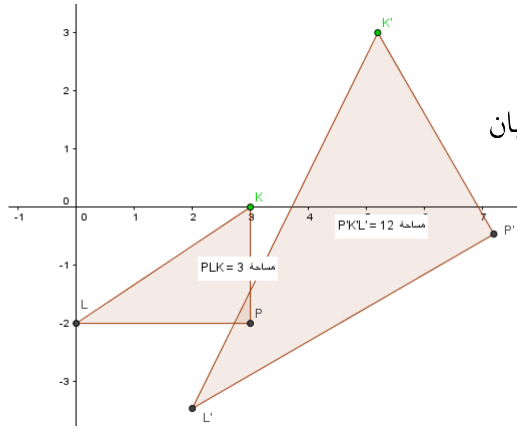
5. تعيين طبيعة المثلثين PKL و $P'K'L'$:

$S(P) = P'$ أي : $z_{P'} = (\sqrt{3} + i)z_P$ إذن : $z_{P'} = 2 + 3\sqrt{3} + i(3 - 2\sqrt{3})$

$S(K) = K'$ أي : $z_{K'} = (\sqrt{3} + i)z_K$ إذن : $z_{K'} = 3\sqrt{3} + 3i$

$S(L) = L'$ أي : $z_{L'} = (\sqrt{3} + i)z_L$ إذن : $z_{L'} = 2 - 2i\sqrt{3}$

ملاحظات	المدة	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المراحل



المثلثان PKL و $P'K'L'$ قائمان و متشابهان
حيث نسبة التشابه هي 2 .

لدينا : $S_{PKL} = \dfrac{PK.PL}{2} = 3$

و منه ينتج : $S_{P'K'L'} = 4S_{PKL} == 12$

بناء المفاهيم:

التشابه المباشر:

في كل مايلي المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$

تعريف:
التشابه المباشر هو كل تحويل نقطي في المستوي يحافظ على نسب المسافات و على الزوايا الموجهة .

العناصر المميزة لتشابه مباشر:

نتيجة:
لتكن A ، B ، C و D نقط متمايزة مثنى مثنى من المستوي و A' ، B' ، C' و D' صورها على الترتيب بالتحويل S

يكون التحويل النقطي S تشابها مباشرا للمستوي إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي موجب تماما k حيث :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'D'}{CD} = k \quad \text{و} \quad (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{CD};\overrightarrow{C'D'})$$

- يسمى العدد الحقيقي k : نسبة التشابه المباشر
- تسمى θ : زاوية التشابه المباشر
- التشابه المباشر يقبل نقطة صامدة وحيدة Ω تسمى : مركز التشابه المباشر

تمرين تطبيقي :

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$

$ABCD$ مربع مباشر طول ضلعه 1 و مركزه O حيث : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{2}$

① عين الخصائص المميزة للتشابه المباشر S الذي مركزه A و يحول B إلى O

② عين النسبة و الزاوية للتشابه المباشر S' الذي يحول B إلى O و A إلى D

حل مختصر :

① $S(B) = O$ معناه : $AO = \dfrac{\sqrt{2}}{2}AB$ و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}$.

② $OD = \dfrac{\sqrt{2}}{2}BA$ و $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{OD}) = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}$.

تقويم

حل التمرين 10و 12 صفحة 179

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المادة : رياضيات

المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية + ر + تق ر

المحتوى المعرفي : الأعداد المركبة

الكفاءات المستهدفة: – التعبير عن تشابه مباشر بالأعداد المركبة .

– سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية: التذكير بمكتسبات السنة الماضية . التعبير عن تشابه مباشر بالأعداد المركبة : المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ S تشابه مباشر نسبته k و زاويته θ لتكن O' ذات اللاحقة b صورة مبدأ المعلم O بالتشابه المباشر S من أجل كل نقطة M لاحقتها z تختلف عن O فإن M' ذات اللاحقة z' صورة M بالتشابه S تحقق : $\begin{cases} O'M' = k.OM...(1) \\ (\overrightarrow{OM};\overrightarrow{O'M'}) = \theta...(2) \end{cases}$ من (1) لدينا : $\|z'-b\| = k\|z\|$ من (2) لدينا: $arg\left(\frac{z'-b}{z-0}\right) = \theta$ و عليه : $\begin{cases} \|z'-b\| = k\|z\| \\ arg(z'-b) - arg(z) = \theta \end{cases}$ و تكافيء : $\begin{cases} \|z'-b\| = k\|z\| \\ arg(z'-b) = arg(z) + \theta \end{cases}$ تكافيء : $z'-b = a.z$ حيث : $\|a\| = k$ و $arg(a) = \theta$ أي : $a = ke^{i\theta}$ و عليه : $z'-b = ke^{i\theta}.z$ إذن : $z' = ke^{i\theta}.z + b$ إذن : التشابه المباشر S الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' بحيث : $z' = ke^{i\theta}.z + b$ **خاصية «①»:** كل تشابه مباشر من المستوي المركب له كتابة مركبة من الشكل : $z' = az + b$ حيث : a و b عددان مركبان و $a \neq 0$ **خاصية «②»:** ليكن S تشابه مباشر نسبته k و زاويته θ و مركزه Ω ذات اللاحقة z_Ω . M نقطة لاحقتها z صورتها بالتشابه المباشر S هي M' لاحقتها z' حيث : $z' = ke^{i\theta}.z + b$ لكن : $z_\Omega = ke^{i\theta}.z_\Omega + b$ و بالطرح نجد : $z' - z_\Omega = ke^{i\theta}(z - z_\Omega)$ و هي العبارة المختصرة للتشابه المباشر S الذي مركزه Ω و نسبته k و زاويته θ		

المراحل	السير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات

ملاحظة :

لا توجد تشابهات أخرى كتابتها المركبة تختلف عن $z' = az + b$

مع: $a \in \mathbb{C}^*$ و $b \in \mathbb{C}$

مثال «①» :

⋆ طبيعة التحويل الذي عبارته المركبة : $z' = (1-i)z + 2 - i$

هو : تشابه مباشر نسبته $k = |1-i| = \sqrt{2}$ و زاويته $arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$

و مركزه Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = \frac{2-i}{1-1+i} = -1 - 2i$

بناء المفاهيم:

مثال «②» :

⋆ العبارة المركبة للتشابه المباشر الذي مركزه w ذات اللاحقة $z_w = 3 - i\sqrt{3}$

و نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

هي : $z' = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}z + b$ و منه : $z' = i\sqrt{3}z - 4\sqrt{3}i$ ($b = z_w(1-a)$)

(يمكن استعمال العبارة المختصرة للحصول على المطلوب)

مثال «③» :

A و B نقطتان لاحقتاهما $z_A = 5 + 3i$ و $z_B = 5 - 3i$ على الترتيب .

⋆ لنعين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة A بالتشابه المباشر S الذي مركزه B و نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{3\pi}{4}$:

لدينا : $S(A) = A'$ معناه : $z_{A'} - z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}(z_A - z_B)$

و منه : $z_{A'} = (-1+i)(z_A - z_B) + z_B$

إذن : $z_{A'} = (-1+i)(5 + 3i - 5 + 3i) + 5 - 3i = -1 - 9i$

تمرين تطبيقي :

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

A ، B و C ثلاث نقط لواحقها $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = 4 + i\sqrt{3}$ على الترتيب .

① أعط العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه A و يحول B إلى C

② استنتج طبيعة المثلث ABC

② عين z_D لاحقة النقطة D صورة C بالتشابه المباشر S

③ عين (C) مجموعة انقط M ذات اللاحقة z حيث :

$$z = 2 + i + 2e^{i\theta} \qquad \text{مع: } \theta \in \mathbb{R}$$

④ عين صورة (C) بالتشابه المباشر S

تقويم

حل التمرين 15و 16 صفحة 179

حل التمرين 43 صفحة 183

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المادة : رياضيات

المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية + ر + تق ر

المحتوى المعرفي : الأعداد المركبة

الكفاءات المستهدفة: - تعيين التحليل القانوني للتشابه المباشر بالأعداد المركبة .

- سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية: التذكير بالعبارة المركبة للتحويلات النقطية المألوفة . التحليل القانوني للتشابه المباشر : في كل ما يلي المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ليكن h التحاكي الذي نسبته k و مركزه Ω ذات اللاحقة z_Ω و الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M_1 لاحقتها z_1 . و R الدوران الذي مركزه Ω ذات اللاحقة z_Ω و زاويته θ و الذي يرفق بكل نقطة M_1 لاحقتها z_1 النقطة M' لاحقتها z' . $M \xrightarrow{h} M_1 \xrightarrow{R} M'$ أي : M' هي صورة M بالتحويل النقطي $R\circ h$ $h(M)=M_1$ معناه : $z_1-z_\Omega=k(z-z_\Omega)$ و $R(M_1)=M'$ معناه : $z'-z_\Omega=e^{i\theta}(z_1-z_\Omega)$ و عليه : $R\circ h(M)=M'$ معناه : $z'-z_\Omega=ke^{i\theta}(z-z_\Omega)$ إذن $R\circ h=S$ معناه : مركب تحاكي و دوران هو تشابه مباشر . - بنفس الطريقة نثبت أن : $h\circ R=S$ خاصية: S تشابه مباشر نسبته k ($k\in\mathbb{R}_+^*$) و زاويته θ ($\theta\in\mathbb{R}$) • إذا كان $k=1$ و $\theta=0$ التشابه المباشر S انسحاب . • في الحالات الأخرى S يقبل نقطة صامدة وحيدة Ω لاحقتها z_Ω و : $S=R\circ h=h\circ R$ حيث : h التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k و R الدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ مثال : ⋆ H تحاكي مركزه w ذات اللاحقة $z_w=i$ و نسبته 3 و يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M_1 لاحقتها z_1 . ⋆ R دوران مركزه w و زاويته $\theta=\frac{\pi}{2}$ و يرفق بكل نقطة M_1 لاحقتها z_1 النقطة M' لاحقتها z' .		

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات

- لنعين طبيعة التحويل $R\circ H$ و عناصره المميزة :

$H(M)=M_1$ معناه : $z_1-z_w=3(z-z_w)$ أي : $z_1=3z-2i$

$R(M_1)=M'$ معناه : $z'-z_w=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_1-z_w)$ أي : $z'=iz_1+1+i$

و عليه M' هي صورة M بالتحويل $R\circ H$

إذن : $R\circ H(M)=M'$ معناه : $z'=i(3z-2i)+1+i$ أي : $z'=3iz+3+i$

و بالتالي : $R\circ H$ تشابه مباشر نسبته 3 و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و مركزه w .

بناء المفاهيم:

تمرين تطبيقي :(بكالوريا 2012 ر بتصرف)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-2i$ و $z_D=\overline{z_C}$

① بين أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

② نرمز بـ z_E إلى لاحقة النقطة E نظيرة النقطة B بالنسبة إلى المبدأ O

ⓐ بين أن : $\frac{z_A-z_C}{z_E-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

ⓑ بين أن النقطة A هي صورة E بدوران R مركزه C يطلب تعيين زاويته .

ⓒ استنتج طبيعة المثلث AEC

③ H هو التحاكي الذي مركزه O و نسبته 2

ⓐ عين طبيعة التحويل $R\circ H$ و عناصره المميزة .

ⓑ استنتج صورة الدائرة (γ) بالتحويل $R\circ H$

حل مختصر :

① $OA=OB=OC=OD=2$.

②

- لدينا : $z_E=-z_B$ و عليه : $\frac{z_A-z_C}{z_E-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$
- $z_A-z_C=(z_E-z_C)e^{i\frac{\pi}{3}}$

إذن : A هي صورة E بالدوران R الّذي مركزه C و زاويته $-\frac{\pi}{3}$.

- لدينا $CE=CA$ و $(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CA})=-\frac{\pi}{3}$

المثلث AEC متقايس الأضلاع .

③

- $H(M)=M_1$ معناه : $z_1=2z$
- $R(M_1)=M'$ معناه : $z'-z_c=e^{i(-\frac{\pi}{3})}(z_1-z_c)$

و عليه : $z'=2e^{i(-\frac{\pi}{3})}z+\sqrt{3}-i$.

إذن : $R\circ H$ هو تشابه مباشر نسبته 2 و زاويته $-\frac{\pi}{3}$ و مركزه Ω حيث :

$z_\Omega=\frac{-\sqrt{3}-3i}{3}$ أي : $\Omega(\frac{-\sqrt{3}}{3};-1)$.

تقويم

- لدينا : $H(\gamma(0;2))=(\gamma_1)(0;4)$ و $R(\gamma_1)=(\gamma')(O';4)$

حيث : $O'=R(O)$ و منه : $z_{O'}-z_c=e^{i(-\frac{\pi}{3})}(z_O-z_c)$ وعليه نجد : $z_{O'}=\sqrt{3}-i$.

حل التمرين الثاني بكالوريا 2013 رياضي الموضوع الثاني

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المادة : رياضيات

المستوى والشعبة : الثالثة علوم تجريبية + ر + تق ر

المحتوى المعرفي : الأعداد المركبة

الكفاءات المستهدفة: - تركيب تشابهين مباشرين .

الاستاذة سوالمي خديجة

- سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية: التذكير بالعبارة المركبة للتشابه المباشر . في كل ما يلي المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ **تركيب تشابهين مباشرين :** ليكن S_1 التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M_1 لاحقتها z_1 . و S_2 التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M_1 لاحقتها z_1 النقطة M' لاحقتها z' . $M \xrightarrow{S_1} M_1 \xrightarrow{S_2} M'$ أي : M' هي صورة M بالتحويل النقطي $S_2 \circ S_1$ $S_1(M) = M_1$ معناه : $z_1 = a_1 z + b_1$ و $S_2(M_1) = M'$ معناه : $z' = a_2 z_1 + b_2$ و عليه : $S_2 \circ S_1(M) = M'$ معناه : $z' = a_2(a_1 z + b_1) + b_2 = a_1.a_2 z + a_2 b_1 + b_2$ نضع : $a = a_1.a_2$ و $b = a_2 b_1 + b_2$ إذن : $z' = az + b$ مع: $a \in \mathbb{C}^*$ و $b \in \mathbb{C}$ و بالتالي : $S_2 \circ S_1$ تشابه مباشر . حيث : نسبته $k = \|a\| = \|a_1.a_2\| = \|a_1\| \times \|a_2\|$ و زاويته $\theta = arg(a_1.a_2) = arg(a_1) + arg(a_2)$ **ملاحظة :** $S_2 \circ S_1 = S_1 \circ S_2$ **خاصية:** تركيب تشابهين مباشرين هو تشابه مباشر نسبته جداء النسبتين و زاويته مجموع الزاويتين . **مثال :** ⋆ S_1 تشابه مباشر مركزه A ذات اللاحقة $z_A = 1 - i$ و نسبته 3 و زاويته $\frac{\pi}{4}$ ⋆ S_2 تشابه مباشر مركزه A ذات اللاحقة $z_A = 1 - i$ و نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{2}$ إذن : $S_1 \circ S_2$ هو تشابه مباشر مركزه A و نسبته $k = 3 \times 2 = 6$ و زاويته $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$ **تمرين تطبيقي :(بكالوريا 2011 ر بتصرف)** T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z' = (-1+i)z + 1 - 3i$ ① عين طبيعة التحويل T و عناصره المميزة . ② استنتج طبيعة التحويل $T \circ T$ و عناصره المميزة .		

المراحل	السير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات

التشابه المباشر ونقط المستوي :

خاصية:

إذا كانت A ، B ، A' و B' أربع نقط حيث $A \neq B$ و $A' \neq B'$

فإنه يوجد تشابه مباشر وحيد يحول A إلى A' و يحول B إلى B' .

بناء المفاهيم:

البرهان :

ليكن S تشابها مباشرا كتابته المركبة $z' = az + b$ مع $a \neq 0$

z_A ، z_B ، $z_{A'}$ و $z_{B'}$ لواحق A ، B ، A' و B' على الترتيب .

حيث : $A \neq B$ و $A' \neq B'$

$\begin{cases} S(A) = A' \\ S(B) = B' \end{cases}$ معناه : $\begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} = az_B + b \end{cases}$

و بالتالي : $a = \dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$ و $b = z_{A'} - \dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}.z_A$

بما أن : $A' \neq B'$ فإن $a \neq 0$ و التشابه S وحيد .

مثال :

لتكن النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب :

$z_A = 1$ ، $z_B = -3 - 5i$ ، $z_C = -4 + 5i$ و $z_D = -3$

ـ لنعين التشابه المباشر الذي يحول A إلى B و يحول C إلى D :

ليكن S التشابه المباشر المطلوب كتابته المركبة $z' = az + b$

حيث : $a \in \mathbb{C}^*$ و $b \in \mathbb{C}$

$\begin{cases} S(A) = B \\ S(C) = D \end{cases}$ معناه : $\begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_D = az_C + b \end{cases}$ أي : $\begin{cases} -3 - 5i = a + b \\ -3 = a(-4 + 5i) + b \end{cases}$

بالطرح طرف من طرف نجد : $5i = (-5 + 5i)a$ و منه : $a = \dfrac{5i}{-5 + 5i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

من المعادلة $-3 - 5i = a + b$ نجد : $b = -3 - 5i - a$

و منه : $b = -3 - 5i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = -\frac{7}{2} - \frac{9}{2}i$

إذن : العبارة المركبة للتشابه S هي : $z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) z - \frac{7}{2} - \frac{9}{2}i$

ـ عناصره المميزة :

نسبته $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و زاويته $arg(a) = -\frac{\pi}{4}$ و مركزه Ω لاحقتها $z_\Omega = -8 - i$

تمرين تطبيقي :(بكالوريا 2013 ت ر بتصرف)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب :

$z_A = -1 - i\sqrt{3}$ ، $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = -5 + i\sqrt{3}$

S التشابه المباشر الذي يحول A إلى C و يحول O إلى B .

❖ جد الكتابة المركبة للتشابه المباشر S ثم عين العناصر المميزة له .

تقويم

حل التمرين 36 صفحة 182

حل التمرين 49 صفحة 184

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المادة : رياضيات

المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية + ر + تق ر

المحتوى المعرفي : الأعداد المركبة

الاستاذة سوالمي خديجة

الكفاءات المستهدفة: - توظيف خواص التشابهات المباشرة لحل مسائل هندسية .

- سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية: التذكير بالعبارة المركبة للتشابه المباشر . تطبيقــــات : ? تمرين تطبيقي :(بكالوريا 2011 ع ت) المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$. النقاط A ، B و C لواحقها على الترتيب : $z_A=-i$ ، $z_B=2+3i$ و $z_C=-4+i$ $a.1$ اكتب على الشكل الجبري العدد المركب : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ b عين طويلة و عمدة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ c استنتج طبيعة المثلث ABC 2 نعتبر التحويل T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z'=iz-1-i$ a عين طبيعة التحويل T و حدد عناصره المميزة . b ما هي صورة النقطة B بالتحويل T 3 لتكن النقطة D ذات اللاحقة $z_D=-6+2i$ a بين أن النقاط A ، C و D في استقامية . b عين نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول C إلى D c عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S الذي مركزه A و يحول B إلى D		

المراحل	السير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات

بناء المفاهيم:

حل التمرين التطبيقي : (بكالوريا 2011 ع ت)

a.1 الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$:

لدينا : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-4+2i}{2+4i}=\frac{(-4+2i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)}=\frac{20i}{20}=i$

b تعيين طويلة و عمدة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$:

لدينا : $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=|i|=1$ و $arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=arg(i)=\frac{\pi}{2}$

c استنتاج طبيعة المثلث ABC :

لدينا: $\frac{AC}{AB}=1=\frac{|z_C-z_A|}{|z_B-z_A|}=\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|$ إذن : $AC=AB$

و لدينا : $arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}$

و بالتالي : المثلث ABC قائم في A و متساوي الساقين .

a.2 تعيين طبيعة التحويل T و تحديد عناصره المميزة :

T مكتوب من الشكل $z'=az+b$ مع : $a=i$ و $b=-1-i$

بما أن : $|a|=1$ فإن : التحويل T دوران زاويته $arg(i)=\frac{\pi}{2}$

و مركزه w ذات اللاحقة $z_w=-i$

b تعيين صورة النقطة B بالتحويل T :

لتكن B' ذات اللاحقة $z_{B'}$ صورة B بالتحويل T

و عليه : $z_{B'}=iz_B-1-i=2i-3-1-i=-4+i$

a.3 تبيان أن النقاط A ، C و D في استقامية :

لدينا : $$\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=\frac{-4+2i}{-6+3i}=\frac{2(-2+i)}{3(-2+i)}=\frac{2}{3}$$

و منه : $z_C-z_A=\frac{2}{3}(z_D-z_A)$ أي : $\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

إذن : النقط A ، C و D في استقامية .

b تعيين نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول C إلى D :

$h(C)=D$ معناه : $z_D-z_A=k(z_C-z_A)$ حيث : k نسبة التحاكي h

و منه : $$k=\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=\frac{3}{2}$$

a.3 تعيين العناصر المميزة للتشابه المباشر S :

$S(B)=D$ معناه : $z_D-z_A=a(z_B-z_A)$ حيث : $a\in\mathbb{C}^*$

و عليه : $$a=\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}=\frac{3}{2}i$$

إذن : نسبة التشابه المباشر S هي $|a|=\frac{3}{2}$ و زاويته $arg(a)=\frac{\pi}{2}$

تقويم

حل التمرين الثالث بكالوريا 2012 ع ت الموضوع الثاني

ملاحظات عامة حول الحصة: ....