



3GE1.2.3

ديسمبر 2023

المدة: ساعتان

اختبار الفصل الاول في مادة الرياضيات

التمرين الاول: (6ن)

(U_n) متتالية عددية معرفة على N بعدها الأول $U_0 = -4$ وبالعلاقة: $U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + 2$

(1) احسب الحدين u_1 و u_2

(2) ابرهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n, U_n < 8$

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) و استنتج أنها متقاربة

(3) نعتبر من اجل كل عدد طبيعي n المتتالية (V_n) المعرفة كما يلي: $V_n = U_n - \alpha$

(ا) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n $V_{n+1} = \frac{3}{4}U_n - \frac{1}{4}\alpha + 2$

(ب) عين قيمة α حتى تكون (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ ويطلب تعيين حدها الأول V_0

(4) نضع $\alpha = 8$

(ا) اكتب عبارة الحد العام V_n بدلالة n ثم استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $U_n = -12 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 8$

(ب) اكتب المجموع S_n بدلالة n حيث $S_n = U_1 + \dots + U_n$

التمرين الثاني (6ن): في اول يناير من سنة 2005 مؤسسة كبرى تضم 1500 عامل دراسة اظهرت ان كل سنة جديدة 10% من العمال في اول يناير يحالون على التقاعد وحتى تغطي المؤسسة النقص في عدد عمالها تقوم بتوظيف 100 شاب في خلال السنة

من اجل كل عدد طبيعي n نسمي U_n عدد عمال المؤسسة في 1 يناير سنة $(2005+n)$

(1) احسب $U_0; U_1; U_2$

هل المتتالية (U_n) حسابية؟ هندسية؟ برر اجابتك

(ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 0,9U_n + 100$

(2) من اجل كل عدد طبيعي n نضع: $V_n = U_n - 1000$

(3) اثبت ان (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها q وحدها الاول

-- اكتب عبارة الحد العام V_n بدلالة n استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي $U_n = 500 \times 0,9^n + 1000$

(ج) احسب نهاية المتتالية (U_n)

(3) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $U_{n+1} - U_n = -50 \times 0,9^n$

(4) استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n)

التمرين الثالث (8ن): نعتبر الدالة f المعرفة على $R - \{-2\}$ بـ: $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x + 2}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

1- عيّن الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث من أجل كل x من $R - \{-2\}$: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$

2- أدرس تغيرات الدالة f .

3- بين ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين احدهما مائل (Δ) معادلته $y = x - 2$

4- أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

5- عين نقطة تقاطع المستقيمين القاربين ثم بيّن أنها مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

6- أكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

7- انشئ المنحنى (C_f)

تصحيح الاختبار

التمرين الاول: (6ن)

(U_n) متتالية عددية معرفة على N بعدها الأول $U_0 = -4$ وبالعلاقة: $U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + 2$

(1) احسب الحدين $u_1 = -1$ و $u_2 = \frac{-5}{4}$

(2) ابرهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n, U_n < 8$

لتكن الخاصية $p(n)$ من اجل كل عدد طبيعي $n, U_n < 8$
اثبات $p(0)$ صحة $U_0 < 8$ أي $8 > -4$ محققة

نفرض $p(n)$ صحيحة من اجل عدد طبيعي $n, U_n < 8$

ونبرهن $p(n+1)$ صحيحة من اجل عدد طبيعي $n, U_{n+1} < 8$

لدينا $U_n < 8$

ومنه $\frac{3}{4}U_n + 2 < 8$

$U_{n+1} < 8$

ومنه من اجل كل عدد طبيعي $n, U_n < 8$

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n)

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-1}{4}U_n + 2$$

لدينا $U_n < 8$

$U_{n+1} - U_n > 0$ فالمتتالية (U_n) متزايدة

الاستنتاج بما ان المتتالية (U_n) متزايدة ومحدودة من الاعلى فهي متقاربة

(3) نعتبر من اجل كل عدد طبيعي n المتتالية (V_n) المعرفة كما يلي : $V_n = U_n - \alpha$

(1) ابرهن انه من اجل كل عدد طبيعي n $V_{n+1} = \frac{3}{4}V_n - \frac{1}{4}\alpha + 2$

لدينا $V_{n+1} = U_{n+1} - \alpha$ ومنه بالتعويض نجد $V_{n+1} = \frac{3}{4}V_n - \frac{1}{4}\alpha + 2$

(ب) عين قيمة α حتى تكون (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ ويطلب تعيين حدها الأول V_0

لدينا متتالية هندسية يعني $-\frac{1}{4}\alpha + 2 = 0$ ومنه $\alpha = 8$ حدها الاول $V_0 = U_0 - 8$ اي $V_0 = -12$

(نضع $\alpha = 8$)

(1) اكتب عبارة الحد العام V_n بدلالة n

لدينا $V_n = V_0 \times q^n$ ومنه $V_n = -12 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $U_n = -12 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 8$

لدينا

$$U_n = -12 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 8 \text{ ومنه } U_n = V_n + 8$$

ب) اكتب المجموع S_n بدلالة n حيث $S_n = U_1 + \dots + U_n$

$$S_n = 48 - 48 \left(\frac{3}{4}\right)^n + 8n$$

التمرين الثاني (6ن)

1) $U_0 = 1500$ و $U_1 = 1450$ و $U_2 = 1405$

هل المتتالية (U_n) حسابية ؟

لدينا $U_2 - U_1 \neq U_1 - U_0$ ومنه المتتالية (U_n) ليست حسابية

هل المتتالية (U_n) هندسية ؟

لدينا $\frac{U_2}{U_1} \neq \frac{U_1}{U_0}$ ومنه المتتالية (U_n) ليست هندسية

ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 0,9U_n + 100$

2) من اجل كل عدد طبيعي n نضع : $V_n = U_n - 1000$

3) اثبت ان (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها q وحدها الاول

لدينا $V_{n+1} = U_{n+1} - 1000$ ومنه بالتعويض نجد $V_{n+1} = 0,9V_n$

ومنه (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها $q = 0,9$ وحدها الاول $V_0 = 500$

ا) اكتب عبارة الحد العام V_n بدلالة n

لدينا $V_n = V_0 \times q^n$ ومنه $V_n = 500 \times (0,9)^n$

استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $U_n = 500 \times (0,9)^n + 1000$

لدينا

$$U_n = V_n + 1000 \text{ ومنه } U_n = 500 \times (0,9)^n + 1000$$

ج) احسب نهاية المتتالية (U_n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1000$$

بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} - U_n = -50 \times 0,9^n$

4) استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n)

المتتالية (U_n) متناقصة لان $U_{n+1} - U_n < 0$

التمرين الثالث (8ن) : نعتبر الدالة f المعرفة على $R - \{-2\}$:- $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x + 2}$

1- عيّن الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث من أجل كل x من $R - \{-2\}$: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$

بالمطابقة $a = 1, b = -2, c = 9$

2- أدرس تغيرات الدالة f

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \xrightarrow{<} -2} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \xrightarrow{>} -2} f(x) = +\infty \end{cases}$$

النهايات

ب المشتقة الدالة f قابلة للاشتقاق على $R - \{-2\}$ حيث $f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{(x+2)^2}$

اتجاه التغير

الدالة f متزايدة تماما على المجالين $[1; +\infty[$ و $]-\infty; -5]$ و متناقصة تماما على المجالين $]-5; -2[$ و $]-2; 1]$

3- بين ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين احدهما مائل (Δ) معادلته $y = x - 2$

$x = -2$ مستقيم مقارب عمودي

لدينا $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[\frac{9}{x+2} \right] = 0$ المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y = x - 2$

4- أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

لما $x \in]-\infty; -2[$ المنحنى (C_f) يقع تحت (Δ) لما $x \in]-2; +\infty[$ المنحنى (C_f) يقع فوق (Δ)

5- عين نقطة تقاطع المستقيمين القاربين هي $A(-2; -4)$

ثم بيّن أنها مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

$$f(-4-x) + f(x) = -8$$

6- أكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

$$y = -\frac{5}{4}x + \frac{5}{2}$$

7- انشئ المنحنى (C_f)