رقم الهاتف: 35 22 47 0550 / 63 54 71 023 فاكس: 67 54 71 023 Email: saitameur3@gmail.com

المحور الأول: النهايات والاستمرارية

المـــادة: رياضـــيات **المستـوى:** 3 ع ت

المحور 1 : النهايات والاستمرارية **الوسائل التعليمية:** الكتاب المدرسي/الانترنت

الموضوع: نهاية منتهية أو غير منتهية عند ما لانهاية **رقم الدرس:** 01

الكفاءات المستهدفة: نهاية منتهية أو غير منتهية عند ما لانهاية. التفسير الهندسي لها

1- النهايات

1- نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند $+\infty$ أو $-\infty$

نهاية منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$

تعريف: f دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0;+\infty[$ و l عدد حقيقي.

القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي. نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى l لما يؤول x إلى $+\infty$.

المستقيم المقارب الأفقي

نتيجة: نقول أن المستقيم ذا المعادلة $y=l$ مستقيم مقارب أفقي للمنحني (C_f) الممثل للدالة f عند $+\infty$.

ملاحظة: نحصل على تعريف و نتيجة مماثلتين عند $-\infty$.

أمثلة:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ * $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ * $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ * $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ * $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ *

نهاية غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$

تعريف1: f دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0;+\infty[$.

القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $]A;+\infty[$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي. نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$.

تعريف2: f دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0;+\infty[$.

القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي $-\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $]-\infty;B]$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي. نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى $-\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$.

ملاحظة: نحصل على تعريفين مماثلين عند $-\infty$.

أمثلة:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ * $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ * $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ * $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ * $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ *

2- نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند عدد حقيقي

نهاية منتهية عند عدد حقيقي

تعريف: f دالة معرفة على مجموعة من الشكل $]a;x_0[\cup]x_0;b[$ و l عدد حقيقي.

القول أن نهاية f عند x_0 هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0 . نكتب $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى l لما يؤول x إلى x_0 .

المستقيم المقارب العمودي

نتيجة

ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و ليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته $x=a$

القول أنّ المستقيم (Δ) مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (C_f) يعني أن الدالة f عند a (من اليمين أو من اليسار) هي $+\infty$ أو $-\infty$

تتمات على النهايات

بعض نهايات الدوال المرجعية

$\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ * $\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$ * $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ *

$\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ * $\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ * $\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ * $\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ *

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ * $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ * $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{x}=+\infty$ * $\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{1}{x}=-\infty$ *

المستقيم المقارب المائل

تعريف: ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y=ax+b$

القول أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) يعني أن:

$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ (على الترتيب $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$)

ملاحظة: إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي: $f(x)=ax+b+\varphi(x)$ مع $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$ أو $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$ فمن الواضح أن المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى الممثل للدالة f عند $+\infty$ أو $-\infty$.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=2x-3+\frac{1}{x^2}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

لدينا $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ و منه فالمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x-3$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

الوضع النسبي لمنحنى و المستقيم المقارب المائل

f دالة عددية و (C_f) التمثيل البياني لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$
وليكن في نفس المستوي المستقيم المقارب المائل للمنحنى (C_f) ذو المعادلة $y=ax+b$
لمعرفة وظعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل نقوم بحساب الفرق $f(x)-(ax+b)$ ثم ندرس إشارته أي

- إذا كان $f(x)-(ax+b)>0$ فإن (C_f) يقع فوق المستقيم المقارب المائل
- إذا كان $f(x)-(ax+b)<0$ فإن (C_f) يقع تحت المستقيم المقارب المائل
- إذا كان $f(x)-(ax+b)=0$ فإن (C_f) و المستقيم المقارب المائل يتقاطعان

المـــادة: رياضـــيات **المستـوى: 3 ع ت**
المحور 1 : النهايات والاستمرارية **الوسائل التعليمية: الكتاب المدرسي. الانترنت**
الموضوع: نهاية منتهية أو غير منتهية عند ما لانهاية **رقم الدرس: 02**
الكفاءات المستهدفة: حساب نهاية دالة عند عدد.عمليات على النهايات

ملاحظات

- يتم حساب نهاية دالة عند الحدود المفتوحة لمجموعة التعريف.
- إذا كانت دالة قابلة للإشتقاق عند عدد حقيقي a من مجموعة تعريفها فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$
- إذا قبلت دالة f عند عدد حقيقي a فإن هذه النهاية وحيدة.
- يمكن لدالة لا تقبل نهاية عند حد من حدود من مجموعة تعريفها، فمثلا الدالة $x\mapsto \sin x$ لا تقبل نهاية عند $+\infty$

2. العمليات على النهايات

f و g دالتان. a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$. نقبل دون برهان المبرهنات التالية:

- **نهاية مجموع دالتين:**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

- **نهاية جداء دالتين:**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\times g(x)\right)$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

- **نهاية حاصل قسمة دالتين:**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\dfrac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

✍ تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات : " عدم التعيين (ح ع ت)"

✍ توجد أربع حالات عدم التعيين وهي من الشكل : $\frac{\infty}{\infty};\frac{0}{0};0\times\infty;+\infty-\infty$

3. نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$

- النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $+\infty$ ($-\infty$).
- النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $+\infty$ ($-\infty$)

نهاية دالة مركبة-النهايات بالمقارنة

1. نهاية دالة مركبة

مبرهنة: a ، b و c تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. u ، v و f دوال حيث $f=v\circ u$.

إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} u(x)=b$ و إذا كان $\lim\limits_{x\to b} v(x)=c$ فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}\right)$ و نريد حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

نلاحظ أن f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب حيث $u(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}$ و $v(x)=\sin x$ ($f=v\circ u$)

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=\frac{\pi}{2}$ و $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} v(x)=1$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

2. النهايات بالمقارنة

مبرهنة1: f ، g و h دوال و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=l$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $g(x)\le f(x)\le h(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.

مبرهنة2: f ، g دالتان و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x)\ge g(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

مبرهنة3: f ، g دالتان و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر

الكافي $f(x) \leq g(x)$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

ملاحظة: تمدد هذه المبرهنات إلى حالتي النهاية عند $-\infty$ وعند عدد حقيقي.

المـــادة: رياضـــيات **المستـوى:** 3 ع ت

المحور 1 : النهايات والاستمرارية **الوسائل التعليمية:** الكتاب المدرسي/ الانترنت

الموضوع: الاستمرارية/ مبرهنة القيم المتوسطة **رقم الدرس:** 03

الكفاءات المستهدفة: استمرارية دالة.إثبات وجود حل للمعادلة $f(x) = k$

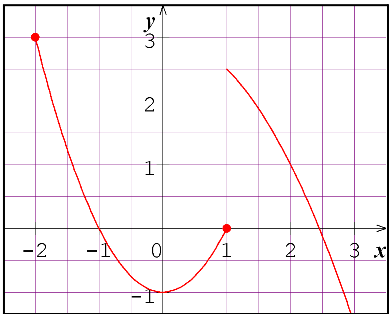
1- الاستمرارية

التفسير البياني: تكون الدالة f مستمرة على مجال I عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم (اليد).

مثال1:

الدالة f الممثلة في الشكل المقابل غير مستمرة على المجال $[-2;3]$ لأنه لا يمكن رسم منحنيها البياني دون رفع القلم.

في حين نلاحظ أنها مستمرة على كل من المجالين $[-2;1]$ و $]1;3]$.



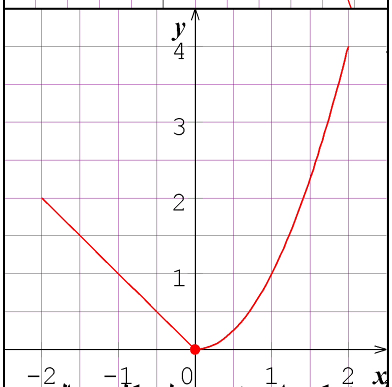
مثال2:

الدالة f المعرفة على المجال $]-2;2[$ بـِ:

$f(x) = -x$ إذا كان $x \in]-2;0]$

$f(x) = x^2$ إذا كان $x \in]0;2[$

و الممثلة في الشكل المقابل مستمرة على المجال $]-2;2[$ لأنه باستطاعتنا رسم تمثيلها البياني بدون رفع القلم.



2. خواص(تقبل دون برهان)

نقبل بأن كل الدوال المقررة في هذا المستوى و المحصل عليها بالعمليات على دوال مألوفة أو بتركيبها مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

نتائج

- الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- الدوال كثيرات الحدود، $\sin$ و $\cos$ مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

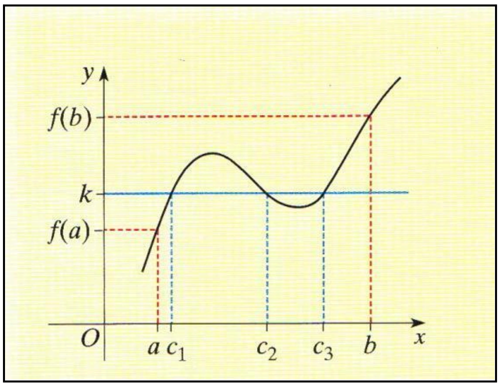
مبرهنة القيم المتوسطة

1. مبرهنة القيم المتوسطة (تقبل دون برهان)

مبرهنة: f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$.

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=k$.

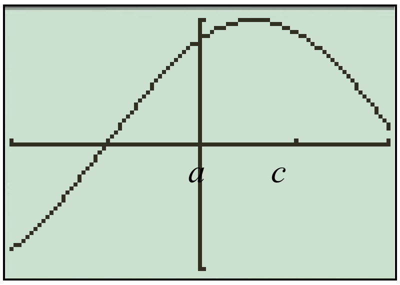
2. التفسير البياني



f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ و ليكن (C) منحنيها البياني في معلم $(O;I,J)$.

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=k$ يقطع على الأقل مرة واحدة المنحنى (C) في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b .

(بالنسبة للشكل المقابل (Δ) يقطع (C) في ثلاث نقط فواصلها على الترتيب c_1، c_2 و c_3).



حالة خاصة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$ و كان $f(a)\times f(b)<0$ (العدد 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$) فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=0$ b

أي أن f تنعدم على الأقل مرة واحدة على $[a;b]$.

3. المعادلة $f(x)=k$

إذا كانت f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا c محصورا بين a و b .

ملاحظة: مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وجود حل على الأقل للمعادلة $f(x)=k$ أما تعيين الحلول أو قيم مقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة.

الدوال المستمرة و الرتيبة تماما

1. الدوال المستمرة و الرتيبة تماما على مجال $[a;b]$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;b]$.