المحور الثاني: الاشتقاقية

رقم الهاتف: 35 22 47 0550 / 63 54 71 023 فاكس: 67 54 71 023 Email: saitameur3@gmail.com

المـــادة: رياضـــيات   **المستـوى:** 3 ع ت
المحور 2 : الاشتقاقية   **الوسائل التعليمية:** الكتاب المدرسي/الانترنت
الموضوع: قابلية الاشتقاق دالة عند عدد   **رقم الدرس:** 01
الكفاءات المستهدفة: حساب مشتقة دالة. معادلة مماس عند فاصلة نقطة.

1. العدد المشتق- الدالة المشتقة

تعريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$. a و $a+h$ عددان حقيقيان من I مع $h\neq 0$.

نقول أن f تقبل الاشتقاق عند a إذا قبلت النسبة $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نهاية محدودة لما يؤول h إلى0.

تسمى هذه النهاية العدد المشتق للدالة f عند a و نرمز لها بالرمز $f'(a)$.

لدينا إذن: $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ أو $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ و ذلك بوضع $x=a+h$

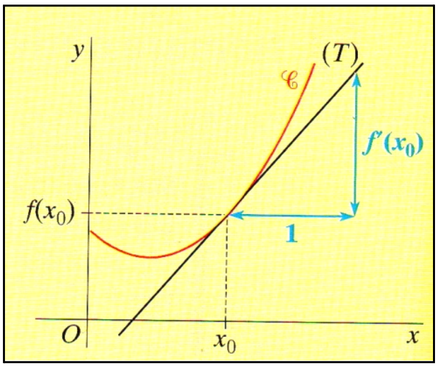
ملاحظة: إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I نقول أنها تقبل الاشتقاق على I و تسمى الدالة $f':x\mapsto f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f.

2. مماس منحني دالة

تعريف و خاصية: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.

إذا قبلت f الاشتقاق عند x_0 فإن (C) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماسا (T) معامل توجيهه $f'(x_0)$ و معادلته:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$



3. المشتقات المتتابعة

تعاريف f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

إذا قبلت الدالة f' هي الأخرى الاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة $(f')'$ تسمى المشتقة الثانية للدالة f و نرمز لها بالرمز f''. إذا قبلت الدالة f'' هي الأخرى الاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة $(f'')'$ تسمى المشتقة الثالثة للدالة f و نرمز لها بالرمز f'''.

تسمى الدوال f' ، f'' ، f''' ،...، $f^{(n)}$ ،... المشتقات المتتابعة للدالة f.

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـِ $f(x)=x^3-\dfrac{1}{x}$

لدينا: $f'(x)=3x^2+\dfrac{1}{x^2}$ ، $f''(x)=6x-\dfrac{2}{x^3}$ ، $f'''(x)=6+\dfrac{6}{x^4}$.

4. الاشتقاقية و الاستمرارية

خاصية: إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق على مجال I فإنها مستمرة على هذا المجال.

ملاحظة: عكس هذه الخاصية ليس دائما صحيحا فمثلا الدالة: $x \mapsto |x|$ مستمرة عند 0 و لكن غير قابلة للاشتقاق عند0.

لدينا $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ بينما النسبة $\dfrac{|h|}{h}$ لا تقبل نهاية عند 0 لأن $\lim\limits_{h\xrightarrow{<}0}\dfrac{|h|}{h}=-1$ و $\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}\dfrac{|h|}{h}=1$.

طريقة إذا كانت نهاية النسبة $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ لما يؤول h إلى0 غير منتهية فإن المنحني (C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة a مماسا موازيا لحامل محور التراتيب.

رقم الهاتف: 0550 47 22 35 / 023 71 54 63 فاكس: 023 71 54 67 Email: saitameur3@gmail.com

المـــادة: رياضـــــيات — **المستــوى:** 3 ع ت

المحور 2 : الاشتقاقية — **الوسائل التعليمية:** الكتاب المدرسي/الانترنت

الموضوع: حساب مشتقة دالة — **رقم الدرس:** 02

الكفاءات المستهدفة: حساب مشتقة دالة

المشتقات و العمليات

1. مشتقات دوال مألوفة

$f(x)$	$f'(x)$	مجالات قابلية الاشتقاق
k (حيث k ثابت حقيقي)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

2. المشتقات والعمليات على الدوال

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

الدالة	$u+v$	ku	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$ (الدالة v لا تنعدم على I)
المشتقة	$u'+v'$	ku'	$u'v+v'u$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$

نتائج:

* الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
* الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها.

. مشتقة الدالة: $x \mapsto u(ax+b)$

مبرهنة: a و b عددان حقيقيان مع $a \neq 0$. u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbf{R}$. ليكن J المجال المكون من الأعداد الحقيقية x حيث $ax+b$ ينتمي إلى I .

الدالة $f : x \mapsto u(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على J و لدينا: $f'(x) = au'(ax+b)$

أمثلة:

* الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \sin(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$f'(x) = a\cos(ax+b)$$

* الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = \cos(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$(f'(x) = -a\sin(ax+b$$

3-**اشتقاق دالة مركبة**

مشتقة الدالة $v \circ u$

مبرهنة (دون برهان): إذا قبلت الدالة u الاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و قبلت الدالة v الاشتقاق على $u(I)$ فإن الدالة $v \circ u$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I :

$$(v \circ u)'(x) = v'[u(x)] \times u'(x)$$

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = 2(x^2+3)^2+1$

نلاحظ أن $f = v \circ u$ حيث $u : x \mapsto x^2+3$ و $v : x \mapsto 2x^2+1$ و منه $f'(x) = v'(x^2+1) \times u'(x)$

بعد الحساب نجد: $f'(x) = 4(x^2+3) \times 2x = 8x(x^2+3)$

4- **تطبيقات**

الدالة	$\sqrt{u}$	$[u(x)]^n \ ; n \geq 2$	$\frac{1}{[u(x)]^n} \ ; \ n \geq 1$
المشتقة	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$n\,u'u^{n-1}$	$\frac{-n\,u'}{u^{n+1}}$

رقم الهاتف: 35 22 47 0550 / 63 54 71 023 فاكس: 67 54 71 023 Email: saitameur3@gmail.com

المـــادة: رياضـــيات **المستــوى:** 3 ع ت

المحور 2 : الاشتقاقية **الوسائل التعليمية: الكتاب المدرسي/الانترنت**

الموضوع: تطبيقات الاشتقاقية **رقم الدرس:** 03

الكفاءات المستهدفة:اتجاه تغير دالة باستعمال الدالة المشتقة.القيم الحدية. نقط الانعطاف

1. المشتقة و اتجاه تغير دالة

مبرهنة (دون برهان): f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

* إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x)>0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدالة f من أجلها، فإن الدالة f متزايدة تماما على I .

* إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x)<0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدالة f من أجلها، فإن الدالة f متناقصة تماما على I .

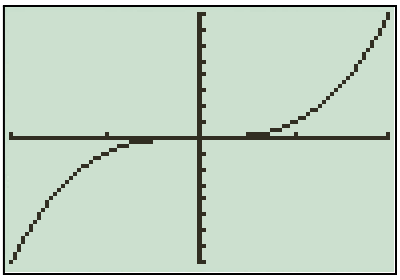
* إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x)=0$ فإن الدالة f ثابتة على I .

ملاحظة: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f(x)=x^3$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=3x^2$ و منه:

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x)>0$ و $f'(0)=0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$



القيم الحدية المحلية

تعاريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I .

* القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J ، $f(x)\leq f(x_0)$.

* القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل x_0

بحيث من أجل كل x من J ، $f(x) \geq f(x_0)$.

* القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية لِـ f يعني أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى أو صغرى

<u>مبرهنة (دون برهان):</u> f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I.

إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند x_0 مغيرة إشارتها فإن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة f

مبرهنة : f دالة قابلة للإشتقاق مرتين على مجال مفتوح يشمل x_0

⋆ إذا انعدمت المشتقة الثانية f'' عند x_0 مغيرة إشارتها فإن النقطة التي إحداثياتها $(x_0; f(x_0))$ تسمى : نقطة إنعطاف لمنحنى الدالة f .

❸ نقطة انعطاف منحنى :

تعريف:

نقطة الإنعطاف هي النقطة التي يخترق فيها المماس المنحنى البياني .