المحور الثالث: الدالة الاسية النيبيرية

المــــادة: رياضـــــيات　　　**المستـوى:** 3 ع ت

المحور 3 : الدالة الاسية النيبيرية　　　**الوسائل التعليمية:** الكتاب المدرسي/الانترنت

الموضوع: عموميات　　　**رقم الدرس:** 01

الكفاءات المستهدفة: التعرف على الدالة الاسية و خواصها

1. عموميات

مبرهنة و تعريف: توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=f$ و $f(0)=1$.

نرمز إلى هذه الدالة بالرمز " $\exp$ " و نسميها الدالة الأسية (النيبيرية)

ملاحظة: الدالة الأسية هي إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y'=y$ التي تحقق $y(0)=1$.

نتائج: * $\exp(0)=1$.

* من أجل كل عدد حقيقي x، $\exp'(x)=\exp(x)$.

2-خواص جبرية

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين x، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

$$(1)\ \exp(x)\neq 0 \qquad (2)\ \exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)} \qquad (3)\ \exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$$

$$(4)\ \exp(x-y)=\frac{\exp(x)}{\exp(y)} \qquad (5)\ \exp(nx)=\left[\exp(x)\right]^n$$

3. العدد e و الترميز e^x

- العدد e هو صورة العدد 1 بالدالة الأسية أي $e=\exp(1)$. تعطينا الحاسبة $e\approx 2,718281828$.
- من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\exp(n)=\exp(n\times 1)=\left[\exp(1)\right]^n$.

لدينا إذن: من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\exp(n)=e^n$. اصطلاحا نرمز، من أجل كل عدد حقيقي x، إلى $\exp(x)$ بـِ e^x. من أجل كل عدد حقيقي x، $\exp(x)=e^x$. تقرأ e^x : " أسية x ".

ملاحظة: الترميز السابق متلائم مع خواص القوى في الحالة التي يكون فيها الأس عددا صحيحا.
باستعمال الاصطلاح السابق تكتب خواص الدالة الأسية كما يلي:

قواعد الحساب: من أجل كل عددين حقيقيين x، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

- $e^0=1$　　- $\exp'(x)=e^x$　　- $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$
- $e^{x+y}=e^xe^y$　　- $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$　　- $e^{nx}=\left(e^x\right)^n$

الدوال الأسية: $x \mapsto e^{kx}$

1. حلول المعادلة $f'=kf$

مبرهنة: ليكن k عددا حقيقيا.

توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=kf$ و $f(0)=1$. f هي الدالة $x \mapsto e^{kx}$

المـــادة: رياضـــيات **المستـوى:** 3 ع ت

المحور 3 : الدالة الاسية النيبيرية **الوسائل التعليمية: الكتاب المدرسي/الانترنت**

الموضوع: دراسة الدالة الاسية **رقم الدرس: 02**

الكفاءات المستهدفة: التعرف على الدالة الاسية و خواصها

1- دراسة الدالة الأسية

اتجاه تغير الدالة الأسية

خاصية1: من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x > 0$.

خاصية2: الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

نتائج: • من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا: $e^a < e^b$ يعني $a<b$ و $e^a = e^b$ يعني $a=b$.

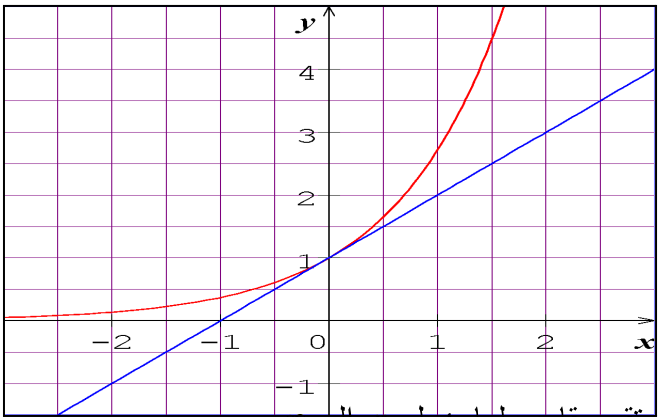
• من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $0<e^x<1$ يعني $x<0$ و $e^x>1$ يعني $x>0$.

النهايات

خواص: $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad (1)$. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \quad (2)$.

جدول تغيرات- التمثيل البياني

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$\exp'(x)$	$+$
e^x	0 ↗ 1 ↗ $+\infty$



• المنحني (C) الممثل للدالة الأسية يقبل محور الفواصل كمستقيم مقارب لما يؤول x إلى $-\infty$.

• لدينا $\exp'(0)=1$ و $e^0=1$. إذن يقبل المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا $(\Delta): y = x+1$.

• من تعريف العدد المشتق لدينا: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp(0+x)-\exp(0)}{x} = \exp'(0)=1$ إذن $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x-1}{x}=1}$

نتيجة: الدالة $x \mapsto 1+x$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة $x \mapsto e^x$ بجوار 0.

أي من أجل x قريب من 0 لدينا: $\boxed{e^x \approx 1+x}$.

تطبيق1: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية:

$e^{2x}>2-e^{x}$ (4) $e^{-2x-1}-e^{x}<0$ (3) $e^{-2x+1}-1=0$ (2) $e^{2x}+3=0$ (1)

طريقة: المعادلة $e^{u(x)}=e^{v(x)}$ تعني $u(x)=v(x)$.

المتراجحة $e^{u(x)}\geq e^{v(x)}$ تعني $u(x)\geq v(x)$.

الحل:

(1) تعني $e^{2x}=-3$. هذه المعادلة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^{2x}>0$. إذن $S=\phi$.

(2) تعني $e^{-2x+1}=1$ أي $e^{-2x+1}=e^{0}$ أي $-2x+1=0$ و منه $x=0,5$ إذن $S=\{0,5\}$.

(3) تعني $e^{-2x-1}<e^{x}$ أي $-2x-1<x$ أي $x>-\frac{1}{3}$ و منه $S=\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$.

(4) تعني $e^{2x}+e^{x}-2\leq 0$. بوضع $e^{x}=X$ نحصل على $X^{2}+X-2\leq 0$

جذرا كثير الحدود $X^{2}+X-2$ هما -2 و 1 و منه $X^{2}+X-2\leq 0$ تعني $X<-2$ أو $X>1$

$X<-2$ تعني $e^{x}<-2$. هذه المتراجحة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.

$X>1$ تعني $e^{x}>1$ أي $x>0$. إذن مجموعة حلول المتراجحة (4) هي $S=]0;+\infty[$.

2- دراسة الدالة $\exp u$

النهايات

لدراسة نهاية دالة $\exp u$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f(x)=e^{-x+2}$.

- لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+2)=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+2}=+\infty$ أي $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.
- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+2)=-\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x+2}=0$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

اتجاه التغيرات

خاصية: إذا كانت u دالة معرفة على مجال I فإن للدالتين u و $\exp u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f(x)=e^{x^{2}-1}$.

نلاحظ أن $f=\exp u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $u(x)=x^{2}-1$.

بما أن الدالة u متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$

وبما ان الدالة u متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

المشتقة **خاصية:** إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $\exp u$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I، $(\exp u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

مثال:

- مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{x^2+x+1}$ هي $f'(x)=(2x+1)e^{x^2+x+1}$.
- مشتقة الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $g(x)=e^{\frac{1}{x}}$ هي $g'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

المـــادة: رياضـــيات　　　　**المستـوى:** 3 ع ت

المحور 3 : الدالة الاسية النيبيرية　　　　**الوسائل التعليمية:** الكتاب المدرسي/الانترنت

الموضوع: المعادلات التفاضلية　　　　**رقم الدرس:** 03

الكفاءات المستهدفة: **حل المعادلة التفاضلية من الشكل** $y' = ay + b$

---

1. المعادلة التفاضلية $y'=ay$ مع $a\neq 0$

مبرهنة: a عدد حقيقي غير معدوم.

الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y'=ay$ هي الدوال $x \mapsto Ce^{ax}$ حيث C عدد حقيقي ثابت كيفي

مثال :

ـ لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية : $y'+5y=0$:

لدينا : $y'+5y=0$ معناه : $y'=-5y$

و منه حلول هذه المعادلة هي الدوال : $x\mapsto ce^{-5x}$ مع: $c\in\mathbb{R}$

2. المعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ مع $a\neq 0$

مبرهنة: a و b عددان حقيقيان مع a غير معدوم.

الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ هي الدوال $x \mapsto Ce^{ax}-\frac{b}{a}$ حيث C عدد حقيقي ثابت كيفي.

مثال :

ـ لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية : $y'=2y+1$:

حلول هذه المعادلة هي الدوال : $x\mapsto ce^{2x}-\frac{1}{2}$ مع: $c\in\mathbb{R}$

خاصية: من أجل كل ثنائية أعداد حقيقية $(x_0;y_0)$ ، المعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ مع $a\neq 0$ تقبل حلا وحيدا f معرفة على $\mathbb{R}$ و تحقق الشرط: $f(x_0)=y_0$.

تمرين تطبيقي : نعتبر المعادلة التفضلية (E) : $2y'+y=1$

❶ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة (E) .

❷ عين الحل الخاص f للمعادلة (E) بحيث : $f(-1)=2$