المحور الرابع: اللوغاريتمية النيبيرية

المــادة: رياضـــيات　　**المستـوى:** 3 ع ت

المحور 4 : الدالة اللوغاريتمية النيبيرية　　**الوسائل التعليمية:** الكتاب المدرسي/الانترنت

الموضوع: عموميات　　**رقم الدرس:** 01

الكفاءات المستهدفة: التعرف على الدالة اللوغاريتمية و خواصها

اللوغاريتم النيبيري لعدد.

1. مبرهنة و تعريف: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$، يوجد عدد حقيقي وحيد b بحيث $e^b=a$.

يسمي هذا العدد " اللوغاريتم النيبيري للعدد a " و نرمز إليه بالرمز" $\ln a$ ".

مثال: * العدد الحقيقي الوحيد b الذي يحقق $e^b=2$ هو إذن $\ln 2$.

2. تعريف الدالة " $\ln$ "

تعريف: نسمي " الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " الدالة التي نرمز إليها بالرمز" $\ln$ " و التي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$.

نتائج:

1. من أجل كل x من $]0;+\infty[$ و من أجل كل y من ℝ، $x=e^y$ يعني $y=\ln x$.
2. من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $e^{\ln x}=x$.
3. من أجل كل x من ℝ، $\ln(e^x)=x$.
4. بما أن $e^0=1$ فإن $\ln 1=0$ و بما أن $e^1=e$ فإن $\ln e=1$

ملاحظة: نعبر عن النتيجة " 1 " بالقول أن الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " $\ln$ " هي الدالة العكسية للدالة الأسية " $\exp$ ".

خاصية: في معلم متعامد و متجانس، التمثيلان البيانيان للدالتين الأسية و اللوغاريتمية النيبيرية متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y=x$ (المنصف الأول).

3. اتجاه تغير الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

خاصية: الدالة اللوغاريتمية النيبيرية متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

نتائج: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$:

1. $\ln a=\ln b$ يعني $a=b$.
2. $\ln a<\ln b$ يعني $a<b$.
3. $\ln a>0$ يعني $a>1$ و $\ln a<0$ يعني $0<a<1$ كما أن $\ln 1=0$.

الخواص الجبرية

1. الخاصية الأساسية

خاصية: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$، $\ln(ab)=\ln a+\ln b$.

2. نتائج

نتيجة1: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$، $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$ و $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$.

ملاحظة: يتم تعميم هذه النتيجة إلى عدة أعداد حقيقية موجبة تماما و هكذا يكون لدينا:

من أجل كل أعداد حقيقية a_1 ، a_2 ،...، a_n من $]0;+\infty[$ ، $\ln(a_1a_2...a_n)=\ln a_1+\ln a_2+...+\ln a_n$.

نتيجة2: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد صحيح نسبي n ، $\ln(a^n)=n\ln a$.

نتيجة3: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ ، $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln a$.

المـــادة: رياضـــيات
المستـوى: 3 ع ت

المحور 4 : الدالة اللوغاريتمية النيبيرية
الوسائل التعليمية: الكتاب المدرسي/الانترنت

الموضوع: دراسة الدالة اللوغاريتمية النيبيرية
رقم الدرس: 02

الكفاءات المستهدفة: تغيرات الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

1. النهايات

خواص: نهاية الدالة " $\ln$ " عند $+\infty$ هي $+\infty$ و نهايتها عند 0 هي $-\infty$.

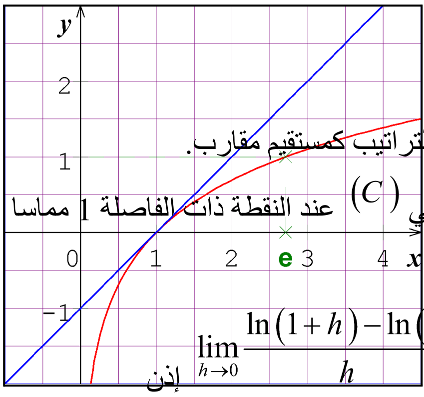
$$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \quad (1) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0}\ln x=-\infty \quad (2)$$

2. الاستمرارية و الاشتقاقية

خواص: الدالة " ln " مستمرة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

3. جدول تغيرات الدالة" ln "

x	0 ‖ 1 $+\infty$
$\ln'(x)$	+
$\ln x$	$-\infty$ ↗ 0 ↗ $+\infty$



- المنحنى (C) الممثل للدالة " ln " يقبل محور التراتيب كمستقيم مقارب.
- لدينا $\ln'(1)=1$ و $\ln 1=0$. إذن يقبل المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا $(\Delta): y=x-1$.
- من تعريف العدد المشتق لدينا: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h}=\ln'(1)=1$ إذن

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1}$$ أو $$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1}$$

المـــادة: رياضـــيات   **المستـوى:** 3 ع ت

المحور 4 : الدالة اللوغاريتمية النيبيرية   **الوسائل التعليمية:** الكتاب المدرسي/الانترنت

رقم الدرس: 03 $\ln u$ **الموضوع:** دراسة الدالة

الكفاءات المستهدفة: توظيف خواص الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

1. النهايات

لدراسة نهاية دالة $\ln u$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $]2;+\infty[$ بـ $f(x)=\ln(x-2)$.

- لدينا $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$ و بما أن $\lim\limits_{X\to 0}\ln X=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to 2}\ln(x-2)=-\infty$ أي $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=-\infty$
- لدينا $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-2)=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to +\infty}\ln X=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(x-2)=+\infty$ أي $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=+\infty$

2. اتجاه التغيرات

خاصية: إذا كانت u دالة معرفة و موجبة تماما على مجال I فإن للدالتين u و $\ln u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـِ $f(x)=\ln\left(\frac{3}{x-1}\right)$.

نلاحظ أن $f=\ln u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـِ $u(x)=\frac{3}{x-1}$.

بما ان الدالة u متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

3. المشتقة

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على مجال I فإن الدالة $\ln u$ قابلة للاشتقاق على I

و لدينا من أجل كل x من I، $(\ln u)'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$.

المادة: رياضـــيات **المستـوى:** 3 ع ت

المحور 3 : الدالة اللوغاريتمية النيبيرية **الوسائل التعليمية: الكتاب المدرسي/الانترنت**

الموضوع: دالة اللوغاريتم العشري **رقم الدرس:** 04

الكفاءات المستهدفة: خواص دالة اللوغاريتم العشري و تطبيقاتها

1. دالة اللوغاريتم العشري

تعريف: نسمي دالة اللوغاريتم العشري الدالة التي نرمز إليها بالرمز " $\log$ " و المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـِ:

$$\log x=\frac{\ln x}{\ln 10}$$

ملاحظة: $\log 1=0$ و $\log 10=1$.

2. خواص

خاصية1: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$ ، $\log(ab)=\log a+\log b$.

نتائج: كل الخواص الجبرية للدالة " $\ln$ " تبقى محققة من قبل الدالة " $\log$ " ومنه:

1. من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$ ، $\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log a-\log b$.

2. من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد صحيح نسبي n ، $\log(a^n)=n\log a$.

حالة خاصة: من أجل كل عدد صحيح نسبي n ، $\log(10^n)=n$ لأن $\log 10=1$.

خاصية2: الدالة " $\log$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

نتيجة: إذا كان x عددا حقيقيا حيث $10^n \le x \le 10^{n+1}$ فإن $n \le \log x \le n+1$

مثال: نعتبر العدد الحقيقي x بحيث $x=3,87\times 10^7$.

لدينا $10^7 < x < 10^8$ و منه $\log 10^7 < \log x < \log 10^8$ نجد هكذا أن $7 < \log x < 8$

ملاحظة: الدالة اللوغاريتم العشري تطبيقات عديدة و هامة في مختلف المواد و بصفة خاصة في الفيزياء، الكيمياء و الجغرافيا.