المحور الخامس: التزايد المقارن

المادة: رياضيات
المستوى: 3 ع ت
المحور 5 : التزايد المقارن
الوسائل التعليمية: الكتاب المدرسي/الانترنت
الموضوع: قوى عدد حقيقي موجب تماما
رقم الدرس: 01
الكفاءات المستهدفة: حل مشكلات بتوظيف دوال قوى

تعاريف

تعريف1: نضع $a^b = e^{b\ln a}$ من أجل كل عددين حقيقيين a و b حيث $a>0$ و b كيفي.

ملاحظة: يقرأ a^b : " a أس b " أو " a قوى b "

مثال: $2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}\ln 2} \approx 3,3219$

تعريف2: a عدد حقيقي موجب تماما.

تسمى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x) = a^x = e^{x\ln a}$ ، الدالة الأسية ذات الأساس a .

2. قواعد الحساب

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a ، b و من أجل كل عددين حقيقيين x ، y لدينا:

$(1)\ \ln(a^x) = x\ln a$ $\quad (2)\ a^x a^y = a^{x+y}$ $\quad (3)\ a^{-y} = \frac{1}{a^y}$. $\quad (4)\ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

$(6)\ (ab)^x = a^x b^x$. $\quad (7)\ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

تطبيق

① بسط العبارتين التاليتين : $a = (0.25)^{-1.5}$ $\qquad b = 3^{-\frac{1}{\ln 3}}$

② حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $3^{2x} = 3^x + 2$

الحل

① $a = (0.25)^{-1.5} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = (2^{-2})^{-\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$

⋆ $b = 3^{-\frac{1}{\ln 3}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{\ln 3}}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{\ln 3}\ln 3}} = \frac{1}{e}$

② $3^{2x} = 3^x + 2$ أي: $3^{2x} - 3^x - 2 = 0$ بوضع : $X = 3^x$ نجد : $X^2 - X - 2 = 0$

حليها : -1 و 2 و منه : $3^x = -1$ تعني $e^{x\ln 3} = -1$ (مستحيلة)

و $3^x = 2$ تعني $e^{x\ln 3} = 2$ أي : $x\ln 3 = \ln 2$ إذن : $x = \frac{\ln 2}{\ln 3}$

و بالتالي : $S = \left\{\frac{\ln 2}{\ln 3}\right\}$

دراسة الدالة $x \mapsto a^x$

نضع من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a و مختلف عن 1 و من أجل x من $\mathbb{R}$، $f_a(x)=a^x=e^{x\ln a}$

- **اتجاه التغير:** الدالة f_a هي مركب الدالة $u:x\mapsto x\ln a$ متبوعة بالدالة الأسية. و بما أن الدالتين u و" $\exp$ " قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن الدالة f_a قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f_a'(x)=\ln a\times e^{x\ln a}=(\ln a)a^x$.

نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $a^x>0$ و بالتالي فإشارة $f_a'(x)$ من نفس إشارة $\ln a$. و منه النتائج التالية:

* إذا كان $0<a<1$ فإن $\ln a<0$ و منه الدالة f_a متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

* إذا كان $a>1$ فإن $\ln a>0$ و منه الدالة f_a متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

- **النهايات:** نميز حالتين حسب إشارة $\ln a$

* إذا كان $0<a<1$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln a=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$ نستنتج أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x)=+\infty$

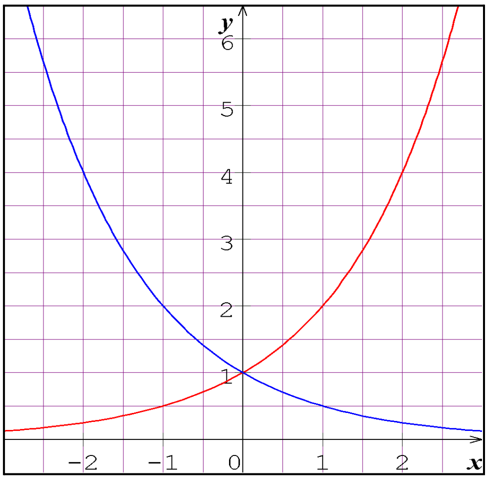
* إذا كان $0<a<1$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a=-\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$ نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x)=0$

* إذا كان $a>1$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln a=-\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$ نستنتج أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x)=0$

* إذا كان $a>1$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$ نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x)=+\infty$

- **جدول التغيرات و التمثيل البياني:**

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_a(x)$ $0<a<1$	$+\infty$	0
x	$-\infty$	$+\infty$
$f_a(x)$ $a>1$	0	$+\infty$



ملاحظة : إذا كان $a=1$ فإن $f_1(x)=1$ و منه الدالة f_1 ثابتة.

المــادة: رياضـــيات
المستـوى: 3 ع ت
المحور 5 : التزايد المقارن
الوسائل التعليمية: الكتاب المدرسي/الانترنت

الموضوع: الدالة الجذر النوني — **رقم الدرس:** 02

الكفاءات المستهدفة: حل مشكلات بتوظيف الجذر النوني

الدالة الجذر النوني

مبرهنة وتعريف: من أجل كل عدد حقيقي موجب a و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، يوجدعدد حقيقي موجب وحيد b يحقق $b^n = a$. يسمى b الجذر النوني للعدد a و نرمز إليه بالرمز $\sqrt[n]{a}$.

تسمى الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ حيث $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ ، الدالة الجذر النوني.

مثال: $\sqrt[n]{0} = 0$ ، $\sqrt[n]{1} = 1$ ، $\sqrt[3]{8} = 2$ ، $\sqrt[4]{81} = 3$ ، $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$.

خاصية1: من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

ملاحظة: نضع اصطلاحا: $0^{\frac{1}{n}} = 0$.

2. الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$

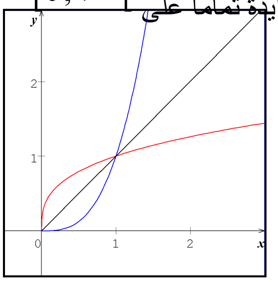
نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، و من أجل x من $[0;+\infty[$ ، $g_n(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

g_n قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و $g_n'(x) = \frac{1}{n} \times x^{\frac{1}{n}-1}$ ومنه $g_n'(x) > 0$ إذن g_n متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$g_n'(x)$	$\Vert$ $\qquad$ $+$
$g_n(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

ملاحظة

الدالة غير قابلة للاشتقاق عند0.



المـــادة: رياضـــيات — **المستـوى:** 3 ع ت

المحور 5 : التزايد المقارن — **الوسائل التعليمية:** الكتاب المدرسي/الانترنت

الموضوع: النهايات المألوفة للدالة الاسية و الدال اللوغاريتمية — **رقم الدرس:** 03

الكفاءات المستهدفة: معرفة خواص الدالة الاسية و الدال اللوغاريتمية

رقم الهاتف: 0550 47 22 35 / 023 71 54 63 فاكس: 023 71 54 67 Email: saitameur3@gmail.com

التزايد المقارن

1. التزايد المقارن للدالتين $x \mapsto e^x$ و $x \mapsto x$

خواص:

$$(1)\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \text{و} \qquad (2)\quad \lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$$

2. التزايد المقارن للدالتين $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto x$

خواص:

$$(1)\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \text{و} \qquad (2)\quad \lim_{x \to 0} x \ln x = 0$$

3. التزايد المقارن مع الدالة $x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$

خواص:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^n \ln x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

خلاصة: كل الدوال $x \mapsto e^x$ ، $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$ تؤول إلى $+\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$ إلا أن سلوكها مختلف.
عند اللانهاية تتفوق الدالة الأسية على الدالة قوة و تتفوق الدالة قوة على الدالة اللوغاريتمية النيبيرية .