

ملخص المتتاليات

المتتاليات الحسابية :

(1) تعريف متتالية حسابية: نقول أن المتتالية (u_n) متتالية

حسابية حدها الأول U_0 وأساسها r حيث r عدد حقيقي إذا

$$U_{n+1} = U_n + r : n$$

(2) عبارة الحد العام:

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإن من أجل كل

$$U_n = U_p + (n-p)r : p \text{ و } n \text{ طبيعيين}$$

حالات خاصة

$$U_n = U_1 + (n-1)r \text{ أو } U_n = U_0 + nr$$

(3) مجموع حدود متتالية حسابية:

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية فإن

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{n-p+1}{2} (u_p + u_n)$$

بصفة عامة

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} (\text{الحد الأول من المجموع} + \text{الحد الأخير})$$

(4) مجموع ثلاث حدود متتالية حسابية :

تكون الأعداد a, b, c بهذا الترتيب حدودا متتالية

من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $2b = a + c$

يسمى b الوسط الحسابي للحددين a و c

المتتاليات الهندسية :

(1) تعريف متتالية هندسية: نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية

حدها الأول U_0 وأساسها q حيث q عدد حقيقي إذا وفقط إذا كان من

$$U_{n+1} = U_n \times q : n$$

(2) عبارة الحد العام:

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q فإن من أجل كل عددين

$$U_n = U_p \times (q)^{n-p} : p \text{ و } n \text{ طبيعيين}$$

حالات خاصة

$$U_n = U_1 \times q^{n-1} \text{ أو } U_n = U_0 \times q^n$$

(3) مجموع حدود متتالية هندسية :

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية فإن

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \right)$$

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \left(\frac{q^{n-p+1} - 1}{q - 1} \right)$$

(4) مجموع ثلاث حدود متتالية هندسية:

تكون الأعداد a, b, c بهذا الترتيب حدودا متتالية من

متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان $b^2 = a \times c$ يسمى b

الوسط الهندسي للحددين a و c

نهاية متتالية هندسية :

1- إذا كان $q > 1$ و $u_0 > 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$ نقول ان المتتالية (u_n) متباعدة

2- إذا كان $q > 1$ و $u_0 < 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$ نقول ان المتتالية (u_n) متباعدة

3 - إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$ نقول ان المتتالية (u_n) متقاربة

4- إذا كان $q \leq -1$ فإن المتتالية (u_n) متباعدة

(5) الاستدلال بالتراجع:

مبدأ الاستدلال بالتراجع: $p(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n وليكن n_0 عدد طبيعي ثابت للبرهان على

صحة الخاصية $p(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n اكبر من او يساوي n_0 نقوم بهاتين المرحلتين

المرحلة الاولى التأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 اي $p(n_0)$

المرحلة الثانية نفرض ان الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n كافي اكبر من او يساوي n_0 اي $p(n)$

(فرضية التراجع) ونبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ اي $p(n+1)$

الرتابة والتقارب:

الطريقة 1: (u_n) متقاربة يعني $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ حيث l عدد حقيقي

(u_n) متباعدة يعني $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \pm\infty$ او ليس لها نهاية

الطريقة 2: 1- إذا كانت المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الاعلى فهي متقاربة

2- إذا كانت المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الاسفل فهي متقاربة

المتتاليات المحدودة (u_n) متتالية عددية معرفة على N و A و B عدنان حقيقيان

- (1) القول ان المتتالية (u_n) محدودة من الاعلى يعني وجود عدد حقيقي A حيث من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq A$
- (2) القول ان المتتالية (u_n) محدودة من الاسفل يعني وجود عدد حقيقي B حيث من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq B$
- (3) القول ان المتتالية (u_n) محدودة يعني انها محدودة من الاسفل ومحدودة من الاعلى

التمرين : في اول يناير من سنة 2005 بلغ عدد سكان مدينة 100000 نسمة كل سنة يتزايد عدد السكان 5% اخذ بعين الاعتبار المواليد الجدد والموتى هناك 4000 مهاجر يمكنهم الاقامة كل سنة في هذه المدينة

من اجل كل عدد طبيعي n نسمي U_n عدد عمال المؤسسة في 1 يناير سنة $(2005+n)$

(1) احسب $U_2; U_1; U_0$

هل المتتالية (U_n) حسابية؟ هندسية؟ برر اجابتك

(ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 1,05U_n + 4000$

(2) من اجل كل عدد طبيعي n نضع : $V_n = U_n + 80000$

(3) اثبت ان (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها q وحدها الاول

(ب) اكتب عبارة الحد العام V_n بدلالة n استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n

$$U_n = 180000 \times (1.05)^n - 80000$$

(ج) قدر عدد السكان سنة 2010

الحل

(1) تعيين الحدود لدينا U_0 عدد عمال المؤسسة في 1 يناير سنة $(2005+0)$ أي $u_0 = 100000$

لدينا $u_1 = u_0 \left(1 + \frac{5}{100}\right) + 4000$ ومنه $u_1 = 100000 \left(1 + \frac{5}{100}\right) + 4000$ منه $u_1 = 109000$

لدينا $u_2 = u_1 \left(1 + \frac{5}{100}\right) + 4000$ ومنه $u_2 = 109000 \left(1 + \frac{5}{100}\right) + 4000$ ومنه $u_2 = 118450$

(2) هل المتتالية حسابية لدينا $u_1 - u_0 = 109000 - 100000 = 9000$

ولدينا $u_2 - u_1 = 118450 - 109000 = 9450$ نجد ان $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ فالمتتالية ليست حسابية

(ب) هل المتتالية هندسية لدينا $\frac{u_1}{u_0} = \frac{109000}{100000} = 1.09$

ولدينا $\frac{u_2}{u_1} = \frac{118450}{109000} = 1.08$ بما ان $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$ فالمتتالية ليست هندسية

$$u_1 = \left(1 + \frac{5}{100}\right)u_0 + 4000$$

ومنه $u_{n+1} = 1,05u_n + 4000$

(ج) لدينا

$$u_2 = \left(1 + \frac{5}{100}\right)u_1 + 4000$$

(3) اثبات ان (V_n) متتالية هندسية لدينا $v_n = u_n + 80000$ ومنه $v_n - 80000 = u_n$

لدينا $v_{n+1} = u_{n+1} + 80000$ بالتعويض نحد $v_{n+1} = 1,05u_n + 4000 + 80000$

ومنه $v_{n+1} = 1,05(v_n - 80000) + 84000$ ومنه $v_{n+1} = 1,05v_n$

ومنه متتالية هندسية (V_n) اساسها $q = 1,05$

حدها الاول لدينا $v_n = u_n + 80000$ ومنه $v_0 = u_0 + 80000$ ومنه $v_0 = 100000 + 80000$ أي $v_0 = 180000$
ب) عبارة الحد العام V_n بدلالة n

من اجل كل عدد طبيعي n لدينا $V_n = v_0 (q)^n$ ومنه $V_n = 180000(1.05)^n$

-) استنتاج انه من اجل كل عدد طبيعي n $U_n = 180000 \times 1.05^n - 80000$

لدينا $V_n = U_n + 80000$ ومنه $U_n = v_n - 80000$ أي $U_n = 180000 \times 1.05^n - 80000$

ج) عدد السكان سنة 2010

لدينا $2010 = 2005 + n$ ومنه $n = 2010 - 2005$ ومنه $n = 5$

$U_5 = 180000 \times 1.05^5 - 80000$ ومنه $U_5 = 180000 \times 1.05^5 - 80000$ أي عدد السكان هو 149731

ناصر تاق