ملخصات البالك • شعب أدبية
المحور الأول • المتتاليات العددية

مفهوم المتتالية

1 تعريف

متتالية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n، أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$ والذي نرمز له بالرمز u_n.

- نرمز للمتتالية u بـ (u_n).
- يسمى u_n الحد العام للمتتالية (u_n)، أو الحد الذي دليله n.
- رتبة الحد u_b باعتبار u_a هو الحد الأول للمتتالية (u_n) هي $b-a+1$.
- إذا كانت (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ فإنّ حدها الأول هو u_0، وإذا كانت معرفة على $\mathbb{N}^*$ فإنّ حدها الأول هو u_1.

2 طرق توليد متتالية

يمكن توليد متتالية عددية بإعطاء

عبارة الحد العام

مثال

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$u_n = 2n+5$$

- لحساب أي حد u_p يكفي تعويض p في عبارة الحد العام لـ (u_n).

$$u_0 = 2\times 0+5 = 5$$
$$u_1 = 2\times 1+5 = 7$$
$$u_{2021} = 2\times 2021+5 = 4047$$

علاقة تراجعية

مثال

لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$\begin{cases} v_0 = -3 \\ v_{n+1} = 4v_n - 1 \end{cases}$$

- لحساب أي حد v_p يجب معرفة الحد الذي قبله v_{p-1}.

$$v_1 = 4v_0 - 1 = 4(-3) - 1 = -13$$
$$v_2 = 4v_1 - 1 = 4(-13) - 1 = -53$$
$$v_3 = 4v_2 - 1 = 4(-53) - 1 = -213$$

اتجاه تغير متتالية عددية

لدراسة اتجاه تغير متتالية عددية (u_n) ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

- $u_{n+1}-u_n<0$ ⟵ (u_n) متناقصة
- $u_{n+1}-u_n=0$ ⟵ (u_n) ثابتة
- $u_{n+1}-u_n>0$ ⟵ (u_n) متزايدة

ملاحظة: القول عن متتالية عددية (u_n) أنّها رتيبة معناه أنّها إما متزايدة وإما متناقصة

المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية

تعريف

المتتالية الحسابية

نقول إنّ (u_n) متتالية حسابية إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=u_n+r$، يسمى r أساس المتتالية (u_n).

المتتالية الهندسية

نقول إنّ (u_n) متتالية هندسية إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=u_n\times q$، يسمى q أساس المتتالية (u_n).

عبارة الحد العام

المتتالية الحسابية

- (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ معناه: $u_n=u_0+nr$
- (u_n) معرفة على $\mathbb{N}^*$ معناه: $u_n=u_1+(n-1)r$
- في الحالة العامة: $u_n=u_p+(n-p)r$

المتتالية الهندسية

- (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ معناه: $u_n=u_0\times q^n$
- (u_n) معرفة على $\mathbb{N}^*$ معناه: $u_n=u_1\times q^{n-1}$
- في الحالة العامة: $u_n=u_p\times q^{n-p}$

خاصية

المتتالية الحسابية

a، b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية بحيث $a+c=2b$.
b يسمى الوسط الحسابي للعددين a و c.

المتتالية الهندسية

a، b و c ثلاثة حدود غير معدومة ومتعاقبة من متتالية هندسية بحيث $a\times c=b^2$.
b يسمى الوسط الهندسي للعددين a و c.

اتجاه التغير

المتتالية الحسابية

(u_n) متتالية حسابية أساسها r.
لدينا: $u_{n+1}-u_n=r$.

إذا كان	فإنّ
$r<0$	(u_n) متناقصة
$r=0$	(u_n) ثابتة
$r>0$	(u_n) متزايدة

المتتالية الهندسية

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q.

1. إذا كان $q<0$ فإن (u_n) ليست رتيبة.
2. إذا كان $q=0$ فإن جميع حدود (u_n) معدومة ابتداء من الحد الثاني.
3. إذا كان $q>0$ ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$.

	$q>1$	$q=1$	$0<q<1$
$u_0<0$	(u_n) متناقصة	(u_n)	(u_n) متزايدة
$u_0>0$	(u_n) متزايدة	ثابتة	(u_n) متناقصة

مجموع الحدود

المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
مجموع الحدود = $\frac{\text{عدد الحدود}}{2}$ (الحد الأخير + الحد الأول)	مجموع الحدود = $\frac{\text{الحد الأول}}{1-\text{الأساس}}\left(1-\text{الأساس}^{\text{عدد الحدود}}\right)$
عدد الحدود = دليل الحد الأخير − دليل الحد الأول + 1	عدد الحدود = دليل الحد الأخير − دليل الحد الأول + 1
$S_n=u_p+u_{p+1}+\ldots+u_n=\frac{n-p+1}{2}(u_p+u_n)$	$S_n=u_p+u_{p+1}+\ldots+u_n=\frac{u_p}{1-q}\left(1-q^{n-p+1}\right)\ ;q\neq 1$

المتتاليات التراجعية

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول u_1 و بالعلاقة $u_{n+1}=au_n+b$ حيث $a\neq 0$ و $b\neq 0$.

الحالة 1 $a=1$	الحالة 2 $a\neq 1$ و $u_0=\frac{b}{1-a}$	الحالة 3 $a\neq 1$ و $u_0\neq\frac{b}{1-a}$
طبيعة المتتالية		
(u_n) متتالية حسابية أساسها $r=b$	(u_n) متتالية ثابتة أي: $u_{n+1}=u_n=\ldots=u_0=\frac{b}{1-a}$	لدراسة المتتالية التراجعية (u_n) نستعين بالمتتالية (v_n) ذات الحد العام $v_n=u_n-\frac{b}{1-a}$
مثال تطبيقي		
(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=u_n-3\end{cases}$ • بما أن $u_{n+1}-u_n=-3$ فإن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=-3$ وحدّها الأول $u_1=2$. • عبارة الحد العام: $u_n=u_1+(n-1)r=-3n+5$ • المجموع: $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=\frac{n+1-1}{2}(u_1+u_n)=\frac{n(7-3n)}{2}$	(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $\begin{cases}u_1=-3\\u_{n+1}=2u_n+3\end{cases}$ • بحساب الحدود الأولى نجد: $u_2=-3$، $u_3=-3$، $u_4=-3$،.. • باستعمال البرهان بالتراجع يمكن إثبات أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n=-3$. ((u_n) ثابتة). • المجموع: $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=nu_1=-3n$	(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=2u_n+3\end{cases}$ لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدّها العام: $v_n=u_n+3$. • (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=2$ وحدّها الأول $v_1=4$. • من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $v_n=v_1\times q^{n-1}=2^{n+1}$ • ومنه لكل n من $\mathbb{N}^*$: $u_n=v_n-3=2^{n+1}-3$ • المجموع: $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=v_1-3+v_2-3+\ldots+v_n-3=4\left(2^n-1\right)-3n$

تكرار المحاولة يهوّن كل صعب
والإرادة في النجاح تشق كل درب