❶ مبرهنة القيم المتوسطة

- الهدف اثبات ان معادلة ما، تقبل حلولا في مجال معين باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة.

مبرهنة القيم المتوسطة	
• بين ان المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $a \le \alpha \le b$	• أولا : نبين ان f مستمرة و رتيبة على المجال $[a;b]$ • ثانيا : نحسب كلا من $f(a)$ و $f(b)$ ثم نبين ان k محصورة بين $f(a)$ و $f(b)$ ، وعليه نجد α من المجال $[a;b]$ يحقق : $f(x) = k$
بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $\alpha \in [a;b]$	نبين ان f مستمرة و رتيبة على المجال $[a;b]$. نحسب $f(a)$ و $f(b)$ ، ثم نجد : $f(a) \times f(b) < 0$. ومنه يوجد α وحيد من المجال $[a;b]$ يحقق : $f(x) = 0$

❷ معادلة المماس

ايجاد معادلة المماس	
عين معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0	نكتب المعادلة : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ، ثم نحسب كلا من $f'(x_0)$ و $f(x_0)$ ونعوض في المعادلة
اكتب معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الترتيبة y_0	اي نبحث عن الفاصلة x_0 وذلك بحل المعادلة $f(x_0) = y_0$ ، ثم نكتب معادلة المماس عند x_0
عين بيانيا العدد المشتق : $f'(x_0)$ ملاحظة $f'(x_0)$=معامل توجيه المماس	نحسب معامل التوجيه : $f'(x_0) = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ ، حيث النقطتين A و B من المماس
هل توجد مماسات لـ (C_f) معامل توجيهها a ؟	نبحث عن الفاصلة x_0 بحل المعادلة $f'(x_0) = a$ ، اي عدد حلول المعادلة هي عدد المماسات التي معامل توجيهها a
هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم ذا المعادلة $(d) : y = ax + b$؟	نحل المعادلة : معامل توجيه $f'(x_0) = d$ اي $f'(x_0) = a$ اذا وجدنا حلول نقول يوجد مماسات لـ (C_f) موازية لـ (d)
هل توجد مماسات لـ (C_f) تشمل النقطة $A(\alpha, \beta)$	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $\beta = f'(x_0)(\alpha - x_0) + f(x_0)$ عدد حلول المعادلة تمثل عدد المماسات
هل توجد مماسات لـ (C_f) تعامد المستقيم ذا المعادلة $(d) : y = ax + b$	نبحث عن x_0 بحل المعادلة : $f'(x_0) = -\dfrac{1}{a}$ ، a هو معامل توجيه (d). وعدد الحلول يمثل عدد المماسات

❸ الوضع النسبي

الوضع النسبي بين منحنى و مستقيم	
اشارة الفرق	الوضعية النسبية
الفرق > 0	(C_f) يقع فوق (Δ)
الفرق < 0	(C_f) يقع تحت (Δ)
الفرق $= 0$	- الفرق لم يغير اشارته : (Δ) يمس (C_f) - الفرق يغير اشارته : (Δ) يخترق (C_f). النقطة $A(a, f(a))$ نقطة انعطاف

⚠

- المستقيم المقارب العمودي لا يقطع ابدا (C_f)
- المستقيم المقارب الافقي و المائل يمكن ان يقطعا (C_f)

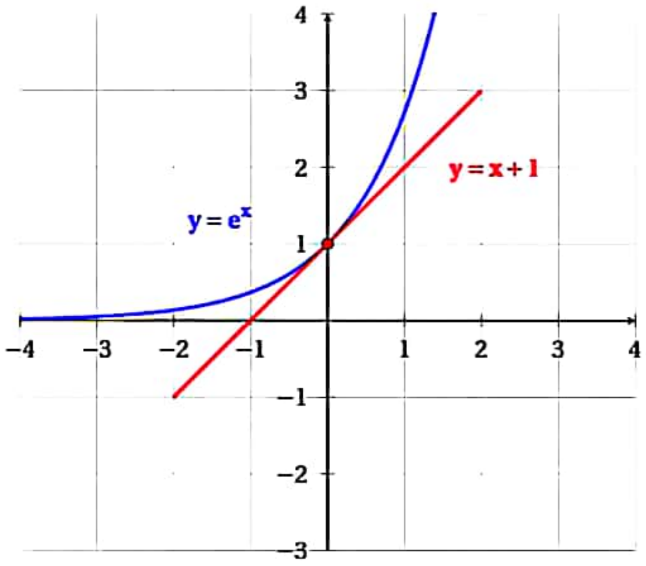
❹ نقطة الانعطاف

كيفية ايجاد نقطة انعطاف	
الطريقة 1 :	$f'(x)$ تنعدم و لا تغير اشارتها
الطريقة 2 :	$f''(x)$ تنعدم مغيرة اشارتها
الطريقة 3 :	عند دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و مماسه (Δ) ، نجد ان (Δ) يخترق (C_f)

❺ انشاء منحنى

لانشاء منحنى نتبع الخطوات التالية :	
❶	تحديد الوحدة ان طلبت
❷	تعيين المستقيمات المقاربة ان وجدت
❸	تعيين الذروات ان وجدت
❹	تعيين نقاط التقاطع مع محور الفواصل ان طلبت
❺	تعيين نقاط الانعطاف ان وجدت
❻	تعيين المماس ان طلب رسمه.

الدالة الأسية ذات الاساس $e \approx 2.718$



الخواص الجبرية للدالة الاسية

■ $e^0 = 1$ ، $e^1 \approx 2.718$

من اجل كل عدد حقيقي a و b :

■ $e^{a+b} = e^a e^b$

■ $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

■ $(e^a)^b = e^{ab}$

■ حالة خاصة :

من اجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$

من اجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\sqrt{e^x} = e^{\frac{1}{2}x}$

النهايات الشهيرة للدالة الاسية

■ $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

■ $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

التزايد المقارن

■ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

■ $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

■ $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

و من اجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

■ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

■ $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

مشتقة الدالة الأسية

■ $(e^u)' = u'e^u$.

مثال : $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ اذن $f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

حل معادلات و متراجحات

■ $e^a = e^b$ يكافئ $a = b$.

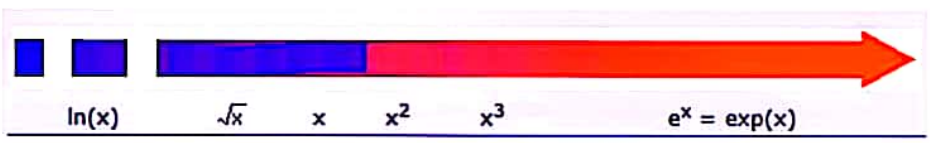
■ تغيير المتغير : الاكثر الاستعمالا بوضع

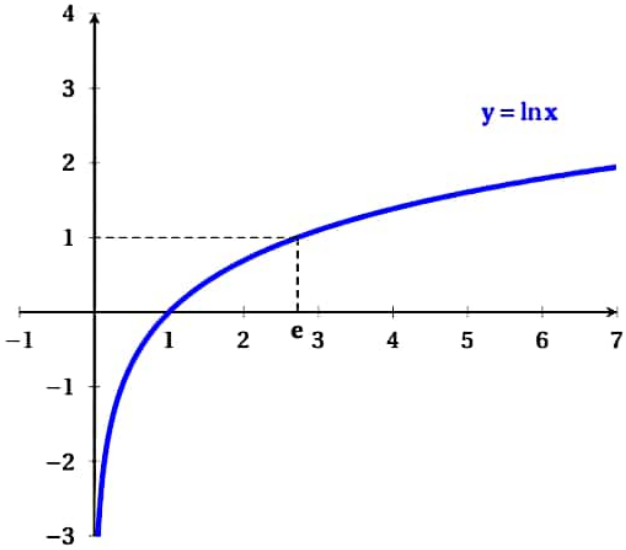
$X = e^x$ أو $X = e^{-x}$

الهدف هو التحول من معادلة تتضمن اسية الى معادلة بسيطة (معادلة من الدرجة الثانية،...)

■ $e^a \geq e^b$ يكافئ $a \geq b$

(الدالة الاسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$)





الخواص الجبرية للدالة اللوغاريتمية النيبيرية

- $\ln 1 = 0$ ، $\ln e = 1$

من اجل كل عدد حقيقي $a > 0$ و $b > 0$:

- $\ln ab = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

حالة خاصة :

من اجل كل a من $]0;+\infty[$ ،

- $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$

من اجل كل $a \in]0;+\infty[$ و من اجل كل $x \in \mathbb{R}$

- $\ln(a^x) = x \ln a$; $a^x = e^{x \ln a}$

من اجل كل $x \in \mathbb{R}$ و من اجل كل $y \in]0;+\infty[$ ،

- $x = \ln y$ يكافئ $y = e^x$

من اجل كل عدد حقيقي $x > 0$ و $a > 0$:

- $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

النهايات الشهيرة للدالة اللوغاريتمية النيبيرية

- $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$

التزايد المقارن

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x \ln x = 0$
- $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

و من اجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x^n \ln x = 0$

مشتقة الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$. مثال : $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$

اذن

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

حل معادلات و متراجحات

- من اجل كل $a, b > 0$

$\ln a = \ln b$. يكافئ $a = b$

- تغيير المتغير : الاكثر الاستعمالا بوضع

$X = \ln x$

الهدف هو التحول من معادلة تتضمن لوغاريتم الى معادلة بسيطة (معادلة من الدرجة الثانية،...)

- من اجل كل $a, b > 0$

$\ln a \geq \ln b$ يكافئ $a \geq b$

(الدالة اللوغاريتمية متزايدة تماما على $]0;+\infty[$)

المتتاليات العددية

◄ طريقة توليد متتالية عددية

يوجد طريقتين لتعريف متتالية عددية :

- ■ عبارة الحد العام $u_n = f(n)$
- ■ علاقة تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$

◄ التمثيل البياني لمتتالية معرفة بعلاقة تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$

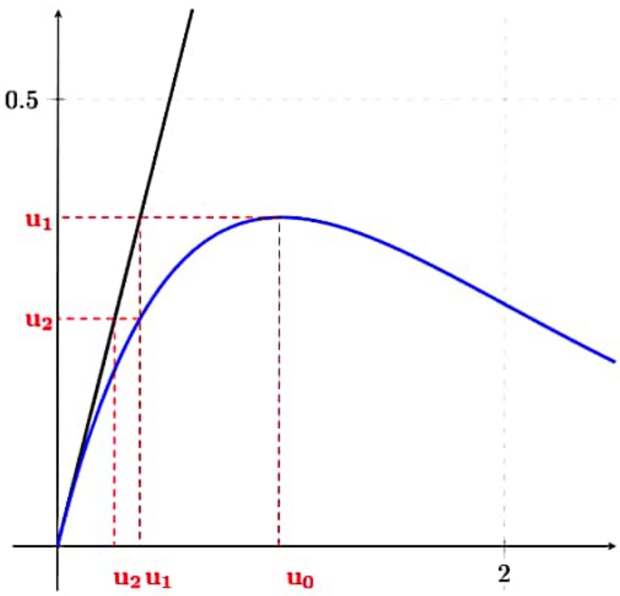
طريقة :

نقوم برسم التمثيل البياني (C_f) للدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.

مثال :

لتكن المتتالية u_n معرفة:

بحدها الاول $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$



◄ دراسة اتجاه تغير متتالية عددية

لدراسة اتجاه تغير متتالية معرفة بعلاقة تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$ نتبع احدى الطرق الاتية :

- ■ ندرس اشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ (اخراج العامل المشترك و استعمال جدول الاشارة)
  - اذا كان الفرق $u_{n+1} - u_n \geq 0$ اذن المتتالية متزايدة
  - اذا كان الفرق $u_{n+1} - u_n \leq 0$ اذن المتتالية متناقصة.
- ■ اذا كانت جميع الحدود موجبة، نقوم بحساب $\frac{u_{n+1}}{u_n}$
  - اذا كان $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ ، اذن المتتالية متزايدة
  - اذا كان $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ اذن المتتالية متناقصة
- ■ باستعمال مبدأ البرهان بالتراجع، نثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n \geq 0$

◄ المتتالية الحسابية

عبارة الحد العام

1. متتالية حسابية (u_n) معرفة :
   - ■ بحدها الاول u_0 او u_p
   - ■ من اجل كل عدد طبيعي n

   $u_n = u_0 + nr$ أو $u_n = u_p + (n-p)r$

   حيث r هو أساس (u_n)

2. نقول ان المتتالية (u_n) حسابية حدها الاول u_0 و اساسها r اذا وفقط اذا كان من اجل كل عدد طبيعي n ، الفرق بين كل حدين متتابعين هو ثابت اي

$$u_{n+1} - u_n = r$$

الوسط الحسابي

اذا كانت a ، b و c اعداد حقيقية ماخوذة بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية فان : $a + c = 2b$

المجموع

مجموع متتالية حسابية:

- ■ حدها الاول u_0 :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

- ■ حدها الاول u_p

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

حيث : $(n-p+1)$ عدد حدود المتتالية من u_p حتى u_n.

بصفة عامة

$$S_n = (\text{عدد الحدود}) \times \left(\frac{\text{الحد الاول} + \text{الحد الأخير}}{2} \right)$$

اتجاه التغير

- اذا كان $r > 0$ فان المتتالية u_n متزايدة تماما
- اذا كان $r < 0$ فان المتتالية u_n متناقصة تماما
- اذا كان $r = 0$ فان المتتالية (u_n) ثابتة

◄ المتتالية الهندسية

عبارة الحد العام

1. متتالية هندسية (u_n) معرفة
   - بحدها الاول v_0 او v_p
   - من اجل كل عدد طبيعي n

$v_n = v_0 \times r^n$ أو $v_n = v_p \times r^{(n-p)}$

2. نقول ان المتتالية (v_n) متتالية هندسية حدها الاول v_0 و اساسها $q \neq 0$ اذا وفقط اذا كان من اجل كل عدد طبيعي n،

$$v_{n+1} = q \times v_n$$

حيث q عدد ثابت يمثل اساس المتتالية.

الوسط الهندسي

اذا كانت a ، b و c اعداد حقيقية ماخوذة بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية فان : $a \times c = b^2$

المجموع

مجموع متتالية هندسية:

- حدها الاول v_0 :

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

- حدها الاول v_p :

$$S_n = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n = v_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

حيث : $(n-p+1)$ عدد حدود المتتالية من v_p حتى v_n.

عدد حدود المتتالية = دليل الحد الاخير - دليل الحد الاول 1+

<u>بصفة عامة</u>

$$S_n = (\text{الحد الاول}) \times \left(\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right)$$

اتجاه التغير

- اذا كان $q > 1$ ، المتتالية (q^n) متزايدة
- اذا كان $0 < q < 1$ ، المتتالية (q^n) متناقصة.

ومن اجل متتالية هندسية كيفية، ناخذ بعين الاعتبار الحد الاول v_0

- اذا كان $v_0 > 0$ ، (v_n) و (q^n) لهما نفس اتجاه التغير
- اذا كان $v_0 < 0$ ، (v_n) و (q^n) لهما اتجاه تغير متعاكسان
- اذا كان $q = 1$ او $q = 0$ المتتالية (q^n) ثابتة
- اذا كان $q < 0$ المتتالية (q^n) غير رتيبة

نهاية متتالية هندسية

- اذا كان $q > 1$ فان $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ (متباعدة)
- اذا كان $q = 1$، $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$ (متقاربة)
- اذا كان $-1 < q < 1$ فان $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ (متقاربة)
- اذا كان $q \leq -1$ فان النهاية غير موجودة (متباعدة)

◄ كيفية حساب نهاية متتالية عددية

1. متتالية معرفة بعلاقة تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$.
   لحساب نهاية متتالية نتبع احدى الطرق التالية:
   - **الطريقة 1 :(متتالية محدودة)**
     اذا كانت المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الاعلى $u_n \leq M$ فهي متقاربة نحو عدد حقيقي $l \leq M$
   - اذا كانت المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الاسفل $u_n \geq m$ فهي متقاربة نحو عدد حقيقي $l \geq m$
   - **الطريقة 2 :**
     اذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة (الطريقة 1) نحو عدد حقيقي l و f مستمرة عند l ، اذن l هو حل للمعادلة $f(l) = l$
   - **الطريقة 3 :**
     استعمال مبرهنة الحصر في حساب النهايات
   - **الطريقة 4 :**
     حساب النهايات باستعمال المقارنة تسمح لنا باثبات ان المتتالية متباعدة

2. متتالية معرفة بعبارة الحد العام $u_n = f(n)$.
نقوم بحساب نهاية المتتالية (u_n) اي $\lim_{n\to+\infty} u_n$

- اذا كانت $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ فهي متقاربة
- اذا كان $\lim_{n\to+\infty} u_n = \mp\infty$ فهي متباعدة.

⚠ النهاية اذا وجدت فهي وحيدة.

◄ متتاليتان متجاورتان

نقول عن متتاليتين (u_n) و (v_n) انهما متجاورتان اذا وفقط اذا كان

- (u_n) متزايدة
- (v_n) متناقصة
- $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

◄ مبدأ البرهان بالتراجع

يستعمل مبدأ البرهان بالتراجع لاثبات خاصية متعلقة بالاعداد الطبيعية n.
للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من اجل كل عدد طبيعي n يكفي :

1. نتاكد من ان $P(n_0)$ صحيحة من اجل n_0
2. اذا كانت $P(n)$ صحيحة من اجل n اكبر من او يساوي n_0 فان $P(n+1)$ صحيحة من اجل $n+1$
3. اذن الخاصية $P(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

تطبيق :

لتكن (u_n) متتالية معرفة بحدها الاول $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

- اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 2$

الحل:

من اجل كل عدد طبيعي n نسمي الخاصية: $P(n) : 0 < u_n < 2$

1. المرحلة 1 : (الخاصية الابتدائية)
من اجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 1$ اذن $0 < u_0 < 2$ ومنه $P(0)$ صحيحة

2. المرحلة 2 : (الوراثية)
من اجل عدد طبيعي $n > 0$ نفرض صحة الخاصية $P(n)$ اي $0 < u_n < 2$ ونبرهن ان الخاصية $P(n+1)$ صحيحة اي $0 < u_{n+1} < 2$.
من فرضية التراجع لدينا :

$$0 < u_n < 2$$
$$2 < 2 + u_n < 4$$
$$\sqrt{2} < \sqrt{u_{n+1}} < \sqrt{4}$$
$$\underbrace{0 < \sqrt{2}}_{\text{بالتعدي}} < u_{n+1} < 2$$

اي ان الخاصية $P(n)$ صحيحة من اجل $n+1$

3. المرحلة3 : (الاستنتاج)
اذن حسب مبدأ البرهان بالتراجع و من اجل كل عدد طبيعي n فان : $0 < u_n < 2$.