امتحان بكالوريا تجريبي **ثانوية أوبينياتر الخاصة**

الشعبة: رياضيات **دورة ماي 2026**

اختبار في مادة: الرياضيات **المدة: 4 سا ونصف**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U على خمس كريات منها: ثلاث كريات تحمل الرقم 2 وكريتان تحملان الرقم 3، ويحتوي صندوق V على خمس كريات منها ثلاث كريات خضراء وكريتان حمراوين.

نعتبر أن كل الكريات متماثلة ولا نميز بينها باللمس.

نسحب عشوائيا كرية واحدة من U ونسجل رقمها، ثم نسحب عشوائيا وفي آن واحد n كرية من الصندوق V، حيث n هو الرقم الذي تحمله الكرية المسحوبة من U.

نعتبر الحدثين التاليين: A " الكريات المسحوبة خضراء " B " توجد كرية واحدة حمراء من بين الكريات المسحوبة "

1) بين أن $P(A)=\dfrac{11}{50}$، ثم أحسب $P(B)$.
2) أحسب احتمال سحب كريتين حمراوين علما أن رقم الكرية المسحوبة من الصندوق U هو 3.
3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة.
   - عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E\left(X\right)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ نضع: $a_n=\underbrace{333.......33}_{n \text{ مرة}}1$ (n مرة الرقم 3)

1) تحقق أن العددين a_1 و a_2 أوليان.
2) بين أن من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $3a_n+7=10^{n+1}$
3) بين أن من أجل كل $k\in\mathbb{N}$: $10^{30k+2}\equiv 7\left[31\right]$
4) بين أن من أجل كل $k\in\mathbb{N}$: $3a_{30k+1}\equiv 0\left[31\right]$، ثم استنتج أن 31 يقسم a_{30k+1}.
5) بين أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$، إذا كان $n\equiv 1\left[30\right]$ فإن المعادلة $a_nx+31y=1$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $\left(z-i\right)\left(z^2+2z+2\right)=0$
2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$، نعتبر النقط A، B، C و D لواحقها على الترتيب:

$$Z_A=i \qquad Z_B=2 \qquad Z_C=-1-i \qquad Z_D=1-2i$$

أ) تحقق أن النقطة D مرجح للجملة المثقلة: $\{(A;1);(B;-1);(C;-1)\}$.

ب) أكتب العدد المركب $\frac{Z_D-Z_A}{Z_B-Z_C}$ على الشكل الأسي ثم فسر النتيجة هندسيا وبرر طبيعة الرباعي $ABDC$.

ج) أكتب العدد المركب $-4+4i$ على الشكل الأسي ثم أحسب $(-4+4i)^{2026}$.

3) من أجل كل نقطة $M(Z)$ من المستوي تختلف عن B نرفق النقطة $M'(Z')$ حيث: $Z'=\frac{iZ-4+2i}{Z-2}$.

أ) تحقق أن: $Z'-i=\frac{-4+4i}{Z-2}$.

ب) بين أن: $AM'\times BM=4\sqrt{2}$ و $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})+(\vec{u};\overrightarrow{BM})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}$.

4) (γ) هي مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\arg(Z'-i)=\frac{\pi}{4}$. عين طبيعة المجموعة (γ).

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=(2-x)e^x-1$

1) أدرس تغيرات الدالة h.

2) أثبت أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $1.8<\alpha<1.9$ و $-1.2<\beta<-1.1$ ثم استنتج إشارة $h(x)$ على $\mathbb{R}$

II. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\|=2cm$ و $\|\vec{j}\|=4cm$.

1) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجتين هندسيا.

2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x)=\frac{h(x)}{(e^x-x)^2}$.

بـ- أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)-x=\frac{(1-x)(e^x-x-1)}{e^x-x}$.

بـ- استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$.

4) أ- أوجد معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$.

بـ- أنشئ كلا من (Δ) و (T) ثم المنحنى (C_f). نأخذ ($f(\alpha)=1.19$ و $f(\beta)=-0.47$).

5) أحسب بالسنتيمتر مربع مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$.

6) أ- m وسيط حقيقي، بين أن جميع المستقيمات (Δ_m) ذات المعادلة $y=mx+1-m$ تتقاطع في نقطة وحيدة يطلب تعيينها.

بـ- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=mx+1-m$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) نعتبر المعادلة (E) : $9x+4y=22$، ذات المجهولين الصحيحين x و y .

- بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv 2[4]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E).

2) N عدد طبيعي يكتب $\overline{133\alpha\beta3}$ في نظام التعداد ذو الأساس 4، ويكتب $\overline{56\alpha0}$ في نذام التعداد ذو الأساس 7 حيث α و β عداد طبيعيان.

- عين α و β ثم أكتب $N+144$ في النظام العشري.

3) نضع $a=88n+22$ و $b=198n+44$ حيث n عدد طبيعي.

أ) بين أن الثنائية $(a;-b)$ حل للمعادلة (E).

ب) باستعمال مبرهنة بيزو بين أن العددين $4n+1$ و $9n+2$ أوليان فيما بينهما ثم جد $PGCD(a;b)$.

التمرين الثانى: (04 نقاط)

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي: $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_{n+1}=\dfrac{4u_n}{u_n+2}$.

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي n : $1\le u_n<2$.

بـ- حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=1-\dfrac{2}{u_n}$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ يطلب حساب حدها الأول.

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

ج- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3) احسب بدلالة n المجموع: $S_n=\dfrac{1}{u_0}+\dfrac{1}{u_1}+...+\dfrac{1}{u_n}$

4) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_{n+1}-2|\le\dfrac{2}{3}|u_n-2|$

بـ- استنتج أنه منه أجل كل عدد طبيعي n : $|u_n-2|\le\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) عين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث: $\begin{cases}2z_1+iz_2=1+i\sqrt{3}\\(\sqrt{3}+2i)z_1-z_2=(1-\sqrt{3})i\end{cases}$

2) في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين:

$z_A=1-i$ و $z_B=2+\sqrt{3}+i$

أ- أكتب العدد z_A على الشكل الأسي.

ب- بين أن: $\frac{z_B}{z_A}=\left(1+\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$، ثم استنتج الشكل الأسي للعدد z_B.

3) أ- عين لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه المبدأ O وزاويته $-\frac{\pi}{6}$.

ب- عين مجموعة النقط $M\left(z\right)$ من المستوي حيث: $\arg\left[\left(z-z_B\right)^2\right]=\arg\left(z_B\right)-\arg\left(z_D\right)$.

4) لتكن النقطة C ذات اللاحقة $z_C=1+i$، عين طبيعة المثلث ABC، ثم استنتج بدقة طبيعة الرباعي $ACBD$.

5) ليكن التحويل النقطي S المعرف كما يلي: $S=r\circ h$ مع h تحاكي مركزه O ونسبته -2.

أ- عين طبيعة التحويل S مع تعيين عناصره المميزة.

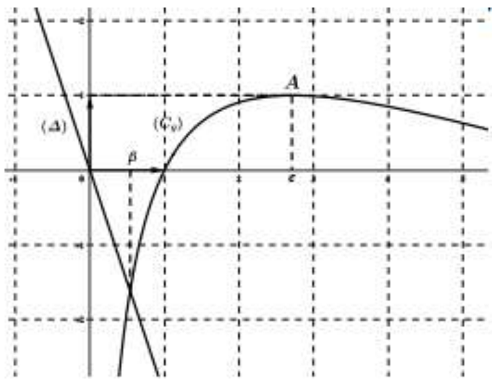
ب- نعرف من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 2$، التحويل H_n كما يلي: $H_n=\underbrace{S\circ S\circ\ldots\circ S}_{n \text{ مرة}}$ (n مرة)

- عين قيم n حتى يكون H_n تحاكي يطلب تعيين عناصره المميزة.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. لتكن g دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g\left(x\right)=-\left(\ln x\right)^2+2\ln x$

، $\left(C_g\right)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ و $\left(\Delta\right)$ مستقيم معادلته: $y=-3x$، β فاصلة نقطة تقاطع $\left(\Delta\right)$ و $\left(C_g\right)$ والنقطة A فاصلتها e كما هو موضح في الشكل.



- بقراءة بيانية حدد وضعية $\left(C_g\right)$ بالنسبة إلى $\left(\Delta\right)$، ثم استنتج إشارة $h\left(x\right)$ حيث: $h\left(x\right)=g\left(x\right)+3x$ على المجال $]0;+\infty[$.

II. f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f\left(x\right)=3\ln x+\frac{\left(\ln x\right)^2}{x}$، $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1) بين أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f\left(x\right)=+\infty$ وفسر النتيجة هندسيا، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$.

2) أ- بين أنه من أجل x من $]0;+\infty[$: $f'\left(x\right)=\frac{h\left(x\right)}{x^2}$.

بـ- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ- بين أن المعادلة $f\left(x\right)=0$ تقبل حلين أحدهما 1 والآخر α حيث: $0.3<\alpha<0.4<\beta$.

بـ- تأكد أن: $\ln\left(\alpha\right)=-3\alpha$

4) أنشئ $\left(C_f\right)$ على المجال $]0;5]$. نأخذ ($\beta\simeq 0.5$ و $f\left(\beta\right)\simeq -1.2$ و $f\left(5\right)\simeq 5.3$)

5) أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة، عين دالة أصلية للدالة $x\longmapsto \ln x$ والتي تنعدم من أجل $x=e$.

بـ- بين أن مساحة الحيز المستوي A_α المحدد بـ $\left(C_f\right)$ والمستقيمات التي معادلاتها: $y=0$، $x=\alpha$ و $x=1$ هي:

$A_\alpha=\left(-9\alpha^3-9\alpha^2-3\alpha+3\right)u.a$.

التصحيح النموذجي

الموضوع الأول

التمرين الأول:

1) $P(A)=\frac{11}{50}$ ، $P(B)=\frac{30}{50}$

2) نضع: R: " سحب كريتين حمراوين " و C: " سحب كرية من الصندوق U تحمل الرقم 3 "

$$P_R(C)=\frac{P(C\cap R)}{P(R)}=\frac{2}{11}$$

3) $X(\Omega)=\{0;1;2\}$

$P(X=0)=\frac{11}{50}$ ، $P(X=1)=\frac{30}{50}$ ، $P(X=2)=\frac{9}{50}$

$$E(X)=\frac{48}{50}$$

التمرين الثاني:

1) $a_1=31$ عدد أولي ، $a_2=331$ لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية التي مربعها أصغر منه أي 2،3،5،7،11،13،17 إذن فهو عدد أولي

2) $a_n=1+3\times10+3\times10^2+...+3\times10^n$ ومنه $a_n=\frac{10^{n+1}-7}{3}$ ومنه $3a_n+7=10^{n+1}$

3) $10^{30k+2}\equiv7[31]$

4) $3a_{30k+1}\equiv0[31]$ حسب مبرهنة غوص: $a_{30k+1}\equiv0[31]$

5) $n=30k+1$ ، $PGCD(a_{30k+1};31)=1$ فإن المعادلة $a_nx+31y=1$ تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

التمرين الثالث:

1) $S=\{i;-1-i:-1+i\}$

2) أ- $Z_A-Z_B-Z_C=Z_D$

ب- $\frac{Z_D-Z_A}{Z_B-Z_C}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ، $(BC)\perp(AD)$ ، $BC=AD$ ، $ABDC$ مربع

3) أ- $Z'-i=\frac{-4+4i}{Z-2}$

ب- $|Z'-i|=AM'$ ، $|-4+4i|=4\sqrt{2}$ ، $|Z-2|=BM$ ومنه: $AM'\times BM=4\sqrt{2}$

$$\arg(Z'-i)=(\vec{u};\overrightarrow{AM'}) \text{ ، } \arg\left(\frac{-4+4i}{Z-2}\right)=\arg(-4+4i)-\arg(Z-2)$$

ومنه $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})+(\vec{u};\overrightarrow{BM})=\frac{3\pi}{4}$

4) مجموعة النقط M هي: نصف المستقيم الموازي لحامل محور التراتيب ماعدا النقطة B

التمرين الرابع:

I. 1) تغيرات الدالة h:

$\lim_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} h(x)=-1$

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $h'(x)=(1-x)e^{x}$

h متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$

2) مبرهنة القيم المتوسطة

إشارة $h(x)$: $h(x)>0$ على المجال $]\beta;\alpha[$ ، $h(x)<0$ على المجالين $]-\infty;\beta[$ و $]\alpha;+\infty[$

$h(\alpha)=h(\beta)=0$

II. 1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لمحور التراتيب معادلتيهما $y=0$ و $y=1$

2) أ- من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{h(x)}{\left(e^{x}-x\right)^{2}}$ $\left(e^{x}-x\right)^{2}>0$

بـ- الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[\alpha;\beta\right]$ ومتناقصة تماما على المجالين $\left[\alpha;+\infty\right[$ و $\left]-\infty;\beta\right]$

جدول تغيرات الدالة f

3) أ- $f(x)-x=\dfrac{(1-x)(e^{x}-x-1)}{e^{x}-x}$

بـ- $\left(C_f\right)$ يقع أعلى (Δ) على المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;1[$ ويقع أسفل (Δ) على المجال $]1;+\infty[$

(Δ) يمس المنحنى $\left(C_f\right)$ في النقطة $O(0;0)$ ويقطع $\left(C_f\right)$ في النقطة $A(1;1)$)

4) أ- $(T): y=(\dfrac{1}{e-1})x+\dfrac{e-2}{e-1}$

بـ- الرسم

5) $A = 8\int_{0}^{1}\left(f(x) - x \right) dx = \left(8\ln(e-1) - 4 \right) cm^2$

6)أ- المستقيمات (Δ_m) تشمل جميعها النقطة $\omega(1;1)$ مهما كان $m \in \mathbb{R}$

ب- $m \leq 0$ المعادلة تقبل حل واحد

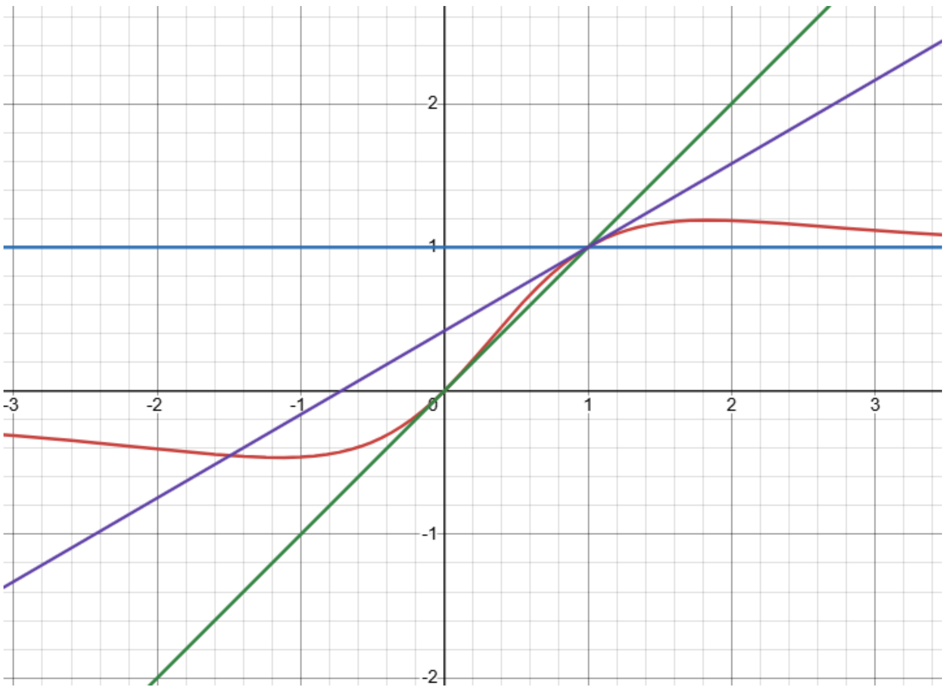
$0 < m < \frac{1}{e-1}$ المعادلة تقبل 3 حلول متمايزة

$m = \frac{1}{e-1}$ المعادلة تقبل حلين متمايزين

$\frac{1}{e-1} < m < 1$ المعادلة تقبل 3 حلول متمايزة

$m = 1$ المعادلة تقبل حلين أحدهما معدوم

$m > 1$ المعادلة تقبل حل واحد



الموضوع الثاني

التمرين الأول:

1) $9x+4y=22$ يكافئ $x\equiv 2[4]$ ومنه $x=4k+2$ و $y=1-9k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

2) $N=1987+4\beta+16\alpha$ و $N=7\alpha+2009$ ومنه $9\alpha+4\beta=22$ حيث $0\le\alpha\le 3$ و $0\le\beta\le 3$ ومنه $\alpha=2$ و $\beta=1$ ومنه $N+144=2167$

3) أ- $9a+4(-b)=22$

بـ- $(-4)(9n+2)+(9)(4n+1)=1$ أي $p\gcd(9n+2;4n+1)=1$ و $a=22(4n+1)$ و $b=22(9n+2)$ ومنه $p\gcd(a;b)=22$

التمرين الثاني:

1) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n<2$

بـ- من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-u_n(u_n-2)}{u_n+2}$ $u_{n+1}-u_n>0$ (u_n) متزايدة تماما

(u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ1 فهي متقاربة

2) - من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ و $v_0=-1$

بـ- من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، $u_n=\frac{2}{1+\frac{1}{2^n}}$

جـ- $\lim u_n=2$

3) $S_n=\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}$

4)أ- $u_{n+1}-2=\frac{2}{u_n+2}(u_n-2)$ ومنه $0<\frac{1}{2}(u_n-2)<u_{n+1}-2\le\frac{2}{3}(u_n-2)$ ومنه $|u_{n+1}-2|\le\frac{2}{3}|u_n-2|$

ومنه $|u_n-2|\le\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ومنه $\lim u_n=2$.

التمرين الثالث:

1) $z_1=1-i$ ، $z_2=2+\sqrt{3}+i$

2) أ- $z_A=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

بـ- $\frac{z_B}{z_A}=\left(1+\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $z_B=\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}$

3) أ- $z_D=2+\sqrt{3}+i$

بـ- مجموعة النقط M هي مستقيم حيث $\left(\vec{u};\overrightarrow{BM}\right)=\frac{\pi}{12}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ يصنع زاوية $\frac{\pi}{12}$ مع حامل محور الفواصل ماعدا النقطة B

4) $AC^2+BC^2=AB^2$ حسب نذرية فيتاغورس العكسية، المثلث ABC قائم في C

$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}$ ومنه $ACBD$ مستطيل

5) أ- S تشابه مباشر مركزه O نسبته 2 وزاويته $\frac{5\pi}{6}$

بـ- $H_n:Z'=2^n e^{\frac{5\pi n}{12}i}$ ، H_n تحاكي من أجل $n=6k'$ مع $k'\in\mathbb{N}^*$

التمرين الرابع:

I. بقراءة بيانية نستنتج أن : $h(x)<0$ من أجل $x\in\left]0;\beta\right[$ و $h(x)>0$ من أجل $x\in\left]\beta;+\infty\right[$ و $h(\beta)=0$

.II (1 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$: $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$

(2 أ- من أجل كل $x\in\left]0;+\infty\right[$ لدينا $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$

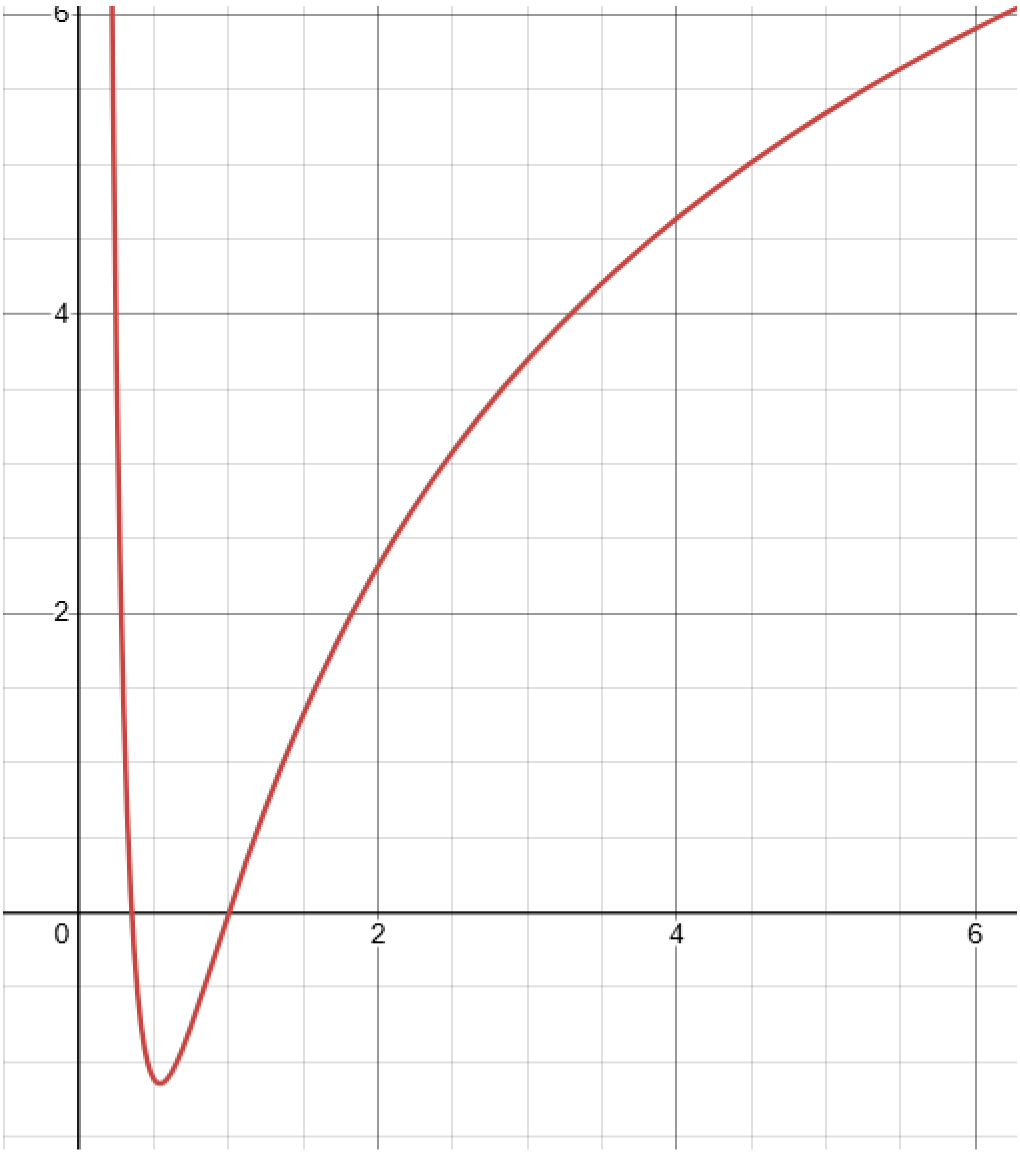
ب- الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left]0;\beta\right[$ ومتزايدة تماما على المجال $\left]\beta;+\infty\right[$

جدول تغيرات الدالة f

(3أ- $f(1)=0$ و $f(\alpha)=0$ (مبرهنة القيم المتوسطة)

ب- $\ln(\alpha)=-3\alpha$

(4 الرسم:



(5 أ- $\int_e^x \ln(t)dt = x\ln x - x$

ب- $A_\alpha = -\int_\alpha^1 f(x)dx = (-9\alpha^3-9\alpha^2-3\alpha+3)(u.a)$